

# 有管理的浮动汇率制度下的外汇期权定价研究

杜 琨<sup>1</sup>, 王安兴<sup>1,2</sup>

(1. 上海财经大学 金融学院, 上海 200433; 2. 上海市金融信息化技术研究重点实验室, 上海 200433)

**摘要:** 我们用一个受约束的跳扩散模型描述汇率行为, 利用傅里叶逆变换给出欧式外汇看涨期权价格的解析解, 并用 Monte Carlo 模拟来展示有约束模型与传统没有约束模型在期权定价上的差异. 由于中国实行有管理的浮动汇率制度, 我们的研究可以应用于中国外汇市场上人民币外汇期权的定价分析.

**关键词:** 外汇期权; 汇率管理; 傅里叶逆变换

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-6062(2014)01-0089-05

## 0 引言

根据商务部的统计, 2010 年, 中国进出口总额达 29727.6 亿美元, 比去年同期增长 34.7%. 预计 2011 年中国进出口总额超过 3 万亿美元. 随着国际贸易规模的扩大, 汇率风险管理问题日益成为对外贸易企业十分重要的工作. 2011 年 4 月 1 日, 中国外汇市场正式开展人民币外汇期权交易, 同年 12 月 1 日, 人民币对外汇期权组合业务正式开展, 可以发行和交易欧式外汇期权. 为了应用外汇期权进行风险管理和套期保值, 有必要研究外汇期权的定价问题.

国外很早就开始了对外汇期权的研究. Garman 和 Kohlhagen<sup>[7]</sup> 在国内外利率均为常数条件下给出了欧式外汇期权价格的解析表达式. Garbbe<sup>[8]</sup> 研究了随机利率下的外汇期权定价问题. Shastri 和 Tandon<sup>[18]</sup> 研究了常数利率下的美式外汇期权的定价问题. Amin 和 Jarrow<sup>[1]</sup> 基于随机的远期利率对外汇期权进行了定价研究. Melino 和 Turnbull<sup>[13]</sup> 在随机波动模型(假设波动率的对数服从一个均值回复过程)下研究了外汇期权的定价问题. Levy<sup>[12]</sup> 研究了亚式外汇期权的定价问题. Jorion<sup>[11]</sup> 研究发现外汇市场上存在明显的跳跃风险, 并在 Merton<sup>[14]</sup> 的跳扩散模型下给出了外汇期权的价格. Daal 和 Madan<sup>[5]</sup> 在更加复杂的跳跃过程下研究了外汇期权的定价问题. Duan 和 Wei<sup>[6]</sup> 在 GARCH 模型下研究了外汇期权的定价问题.

国内关于外汇期权的研究起步相对较晚. 孙昊<sup>[15]</sup> 介绍了外汇期权的概念和国际外汇市场. 孙昊<sup>[16]</sup> 介绍了 Garman 和 Kohlhagen<sup>[7]</sup> 中的定价公式和二叉树定价方法. 胡日东等<sup>[9]</sup> 结合了购买力平价水平, 给出了外汇期权的定价公式. 屠新曙和巴曙松<sup>[20]</sup> 假设汇率服从 Markov 骨架过程, 给出了外汇期权的定价公式. 束景虹和林桂军<sup>[17]</sup> 通过实证

分析说明外汇期权可以较好预测短期汇率走势. 陈荣达等<sup>[2-4]</sup> 通过一系列研究得到了衡量外汇期权所面临风险的较好方法.

以上国内外关于外汇期权定价的研究都没有考虑汇率浮动幅度限制问题. 在中国实行有管理汇率制度, 人民币兑美元汇率每日只能在中间价的上下 0.5% 范围内浮动. 现存的关于外汇期权的定价模型基本上都假设汇率的变化是由一个或几个布朗运动所驱动. 由于布朗运动增量的正态特性, 使得模型中汇率变化超越浮动范围的概率为正, 我们将此概率称为“违规概率”. 由于模型误差可能严重影响定价的准确性, 有必要在汇率行为模型中对汇率浮动幅度做出限制. Jiang et al(2011)<sup>[2]</sup> 第一次将对标的资产变化的限制引入到期权定价模型中, 他们使用截断的正态分布, 给出了欧式股票看涨期权价格的解析解. 目前我们没有看到有约束的跳扩散或随机波动模型描述标的资产价格行为的外汇期权定价模型.

本文将对标的资产价格变化的限制引入到期权定价模型中. 并以欧式外汇看涨期权为例, 在汇率浮动受约束的跳扩散模型下, 利用傅里叶逆变换给出期权价格的解析解. 对应的看跌期权的价格可由平价公式给出. 我们的方法也可以应用到随机利率模型, 随机波动模型或跳跃—随机波动模型等其它更加复杂的模型上(证明略).

## 1 模型建立

我们首先构建非受限的模型, 然后在非受限模型的基础上构建受限模型. 这些模型可以用来描述股票价格、汇率等资产价格行为.

假设在真实概率测度  $P$  下, 下随机过程  $Z(t)$  服从类似于 Merton(1976)<sup>[14]</sup> 的跳扩散模型, 即

收稿日期: 2012-01-05 修回日期: 2012-06-08

基金项目: 教育部科技创新工程重大项目培育资金资助项目(708040); 上海财经大学“211 工程”三期重点学科建设资助项目; 上海财经大学研究生科研创新基金资助项目(CXJJ-2011-395)

作者简介: 杜琨(1982—), 男, 河南开封人, 上海财经大学金融学院在读博士生, 主要从事金融数学与金融工程研究.

$$dZ(t) = \alpha Z(t)dt + \sigma Z(t)dW(t) + d[Q(t) - \lambda\beta t] \quad (1)$$

其中  $\alpha$  为漂移率,  $\sigma$  为波动率。  $Q(t) - \lambda\beta t$  为复合泊松过程, 即  $Q(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} (Y_k - 1)$ ,  $N(t)$  是强度为  $\lambda$  的泊松过程, 跳跃幅度  $\{\ln Y_k\} \sim \text{iid}N(a, b^2)$ ,  $\beta = E[Y_k - 1]$ 。布朗运动  $W(t)$ ,  $N(t)$  和  $\{Y_k\}$  之间两两独立。设期权从初始时刻 0 到到期时刻  $T$  共有  $n$  个交易日, 即  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T, \Delta t = t_i - t_{i-1}$  代表一个交易日。

利用跳过程的 Ito 公式 ([14] 中 Th. 11.5.1), 可得 (1) 式的闭合解:

$$\frac{Z(t_i)}{Z(t_{i-1})} = e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\beta)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon_i} \prod_{k=N(t_{i-1})+1}^{N(t_i)} Y_k \quad (2)$$

其中  $\epsilon_i \sim \text{iid}N(0, 1)$ 。记  $\mu = \alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\beta$ ,  $X_k = \ln Y_k$ , 并利用泊松分布增量的独立平稳性, 则 (2) 式可改写为:

$$\frac{Z(t_i)}{Z(t_{i-1})} = e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\beta)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon_i + \sum_{k=1}^{N_i(\Delta t)} X_k} = e^{\xi_i} \quad (3)$$

其中  $X_k \sim \text{iid}N(a, b^2)$ ;  $N_i(\Delta t)$  代表  $(t_{i-1}, t_i]$  中发生的跳跃次数。对于不同的交易日,  $N_i(\Delta t)$  是独立同分布的泊松随机变量。从而,  $\xi_i$  是独立同分布的, 并且当条件在第  $i$  个交易日所发生的跳跃次数  $N_i(\Delta t)$  时服从正态分布, 即

$$(\xi_i | N_i(\Delta t)) \sim N(\mu\Delta t + aN_i(\Delta t), \sigma^2\Delta t + b^2N_i(\Delta t)) = N(c_i, d_i^2) \quad (4)$$

注意,  $c_i, d_i$  是依赖于  $N_i(\Delta t)$  的随机变量, 但由于  $\{N_i(\Delta t)\}_{i=1}^n$  是独立同分布的, 去掉该下标不影响以下的计算。为简化记号, 在不至于混淆的情况下, 我们在下面的计算中去掉  $c_i, d_i$  和  $N_i(\Delta t)$  的下标。

当汇率波动幅度有限制时, 用  $Z(t)$  描述即期汇率行为可能不合适。例如, 我们假设在一个交易日内汇率向下浮动变化不能超过  $\delta_1$ , 向上浮动不能超过  $\delta_2$ , 即

$$1 - \delta_1 \leq \frac{Z(t_i)}{Z(t_{i-1})} \leq 1 + \delta_2, \quad 0 < \delta_1 < 1, \quad 0 < \delta_2.$$

由 (3) 式, 这等价于要求

$$A = \ln(1 - \delta_1) \leq \frac{Z(t_i)}{Z(t_{i-1})} \leq \ln(1 + \delta_2) = B.$$

但由 (4) 式知,  $\xi_i$  服从条件正态分布; 它将以正概率落到区间  $[A, B]$  以外。为了避免这种“违规”现象出现在模型中, 我们需要对原始的非受限跳扩散模型进行修改。

(1) 式和 (3) 式本质上是等价的, 所以关键在于修改  $\xi_i$  的分布。记一个新变量为:

$$\eta_i = 1_{|\xi_i| < A} A + 1_{A \leq \xi_i < B} \xi_i + 1_{B \leq \xi_i} B. \quad (5)$$

其中  $1_{\cdot}$  为示性函数。不同于  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  被严格的限制在区间  $[A, B]$  中。由于  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  独立同分布且  $\eta_i$  为  $\xi_i$  的连续函数, 从而由 [21] 中定理 2.3.2 知,  $\{\eta_i\}_{i=1}^n$  为独立同分布的随机变量。

对于随机变量  $\eta_i$  我们可作如下解释: 在政策允许的浮动范围  $[A, B]$  内  $\eta_i$  与  $\xi_i$  同样来自跳扩散过程 (1) 式; 在  $[A, B]$  以外, 由于汇率管理政策的约束,  $\eta_i$  被固定在上限  $B$  或下限

$A$  上。

用  $\eta_i$  代替  $\xi_i$ , 我们可以构建在涨跌幅限制下的汇率随机过程:

$$\frac{F(t_i)}{F(t_{i-1})} = e^{\eta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

下节中我们以欧式外汇看涨期权为例, 在受限模型 (6) 式下给出其定价公式。由于中国实行的有管理的浮动汇率制度, 我们给出的定价公式可应用于中国现阶段推出的外汇期权定价。

## 2 模型求解

上一节建立的模型是在真实概率测度  $P$  下, 下面需要将  $\eta_i$  的分布转换到本国风险中性概率测度  $P^*$ 。由于  $\eta_i$  是  $\xi_i$  的函数, 所以关键在于将  $\xi_i$  的分布转换到  $P^*$  下。风险调整不改变波动率, 所以设在  $P^*$  下  $Z(t)$  服从:

$$dZ(t) = (\alpha - \kappa)Z(t)dt + \sigma Z(t)dW^*(t) + d[Q^*(t) - \lambda^*\beta^*t]. \quad (7)$$

其中,  $\kappa$  表示风险溢价,  $W^*(t)$  和  $Q^*(t) - \lambda^*\beta^*t$  分别为本国风险中性概率测度  $P^*$  下的布朗运动和补偿复合泊松过程。  $Q^*(t) = \sum_{k=1}^{N^*(t)} (Y_k^* - 1)$ ,  $N^*(t)$  是强度为  $\lambda^*$  的泊松过程, 跳跃幅度  $\{X_k^* = \ln Y_k^*\} \sim \text{iid}N(a^*, b^{*2})$ ,  $\beta^* = E^*[Y_k^* - 1]$ 。布朗运动  $W^*(t)$ ,  $Q^*(t)$  和  $\{Y_k^*\}$  之间两两独立。

下面我们需要确定风险中性测度  $P^*$  下的参数  $\kappa, \lambda^*, a^*, b^*$ 。由于我们假设跳跃幅度服从对数正态, 所以  $\beta^* = E^*[Y_k^* - 1] = e^{a^* + \frac{1}{2}b^{*2}} - 1$ 。在本国风险中性概率测度  $P^*$  下, 外国银行账户以本币计价的贴现过程为鞅, 所以有

$$E^*[e^{-r_d T} (e^{r_f T} F(T))] = F(0). \quad (8)$$

其中  $F(T)$  的表达式可以从 (6) 式中解出来,  $r_d$  为本国利率,  $r_f$  为外国利率。在风险中性测度  $P^*$  下参数  $\kappa, \lambda^*, a^*, b^*$  必须满足 (8) 式。如果没有浮动限制且没有跳跃, 即  $\lambda^* = 0, A = -\infty, B = +\infty$ , 风险溢价因子  $\kappa$  是唯一需要确定的参数, 通过解 (8) 式可得  $\alpha - \kappa = r_d - r_f$ , 这与 Garman 和 Kohlhagen (1983) [7] 中的结论相同。此时风险中性测度存在且唯一, 市场是完备的。但是我们的模型中存在浮动限制和跳跃风险, 使得 (8) 式无法解析求解, 只能使用数值方法确定参数间的关系。跳跃的存在使得风险中性测度不唯一, 从数学上讲就是有四个待定参数  $\kappa, \lambda^*, a^*, b^*$  却只有一个方程 (8)。因此, 我们可以取  $\alpha - \kappa = r_d - r_f$ , 然后根据市场数据校准  $\lambda^*, a^*, b^*$  使 (8) 式满足。

以下我们假设 (8) 式已被满足, 从而  $Z(t)$  服从:

$$dZ(t) = (r_d - r_f)Z(t)dt + \sigma Z(t)dW^*(t) + d[Q^*(t) - \lambda^*\beta^*t]. \quad (9)$$

注意, 测度变换只改变随机变量的分布而不改变随机变量本身。类似 (4) 式, 我们有

$$(\xi_i | N^*(\Delta t)) \sim N(\mu^*\Delta t + a^*N^*(\Delta t), \sigma^2\Delta t + b^{*2}N^*(\Delta t)) = N(c^*, d^{*2}). \quad (10)$$

注意, (10)式是建立在本国风险中性概率测度  $P^*$  下的, 相应的有  $\mu^* = r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda^* \beta^*$ 。以下的推导均在本国风险中性概率测度  $P^*$  下进行, 为简化记号我们省去  $P^*$  下各个分布函数的参数的上标  $*$ 。

由(6)式可知在到期日汇率为:

$$F(T) = F(t_n) = F(0)e^{\sum_{i=1}^n \eta_i} = F(0)e^\theta. \quad (11)$$

为推导期权价格的公式, 首先需要求出  $\theta$  的特征函数。

引理1 机变量  $\theta$  的特征函数为:

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(u) = & \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ e^{juA} \Phi \left( \frac{A - \mu\Delta t - ak}{\sqrt{\sigma^2\Delta t + b^2k}} \right) \right. \right. \\ & + e^{jub} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{B - \mu\Delta t - ak}{\sqrt{\sigma^2\Delta t + b^2k}} \right) \right] \\ & + e^{(ju\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2)\Delta t + (ju\alpha - \frac{1}{2}u^2b^2)\Delta t} \\ & \times \left[ \Phi \left( \frac{B - (\mu + ju\sigma^2)\Delta t - (a + jub^2)k}{\sqrt{\sigma^2\Delta t + b^2k}} \right) \right. \\ & \left. \left. - \Phi \left( \frac{A - (\mu + ju\sigma^2)\Delta t - (a + jub^2)k}{\sqrt{\sigma^2\Delta t + b^2k}} \right) \right] \right\} \frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda\Delta t} \Bigg\}^n. \end{aligned}$$

其中,  $j$  代表虚数单位,  $\Phi(\cdot)$  代表标准正态分布函数。

为推导外汇期权的价格公式, 我们还需要求出另一随机变量  $\omega$  的特征函数。 $\omega$  的密度函数定义为:

$$f_\omega(x) = \frac{e^x f_\theta(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^y f_\theta(y) dy}$$

其中  $f_\theta(x)$  为  $\theta$  的密度函数。显然有  $f_\omega(x) \geq 0$ , 且  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x f_\omega(x) dx = 1$ 。

引理2 机变量  $\omega$  的特征函数为:

$$\varphi_\omega(u) = \frac{M_\theta(ju + 1)}{M_\theta(1)},$$

其中  $j$  代表虚数单位,  $M_\theta(u)$  代表  $\theta$  的矩母函数, 其具体表达式见引理1的证明。

定理 在受限模型(5)式和(6)式下, 欧式看涨外汇期权价格为:

$$V_c(0) = e^{-r_f T} F(0) P^* \left\{ \omega > \ln \frac{K}{F(0)} \right\} - e^{-r_d T} K P^* \left\{ \theta > \ln \frac{K}{F(0)} \right\},$$

其中  $K$  代表敲定汇率,  $F(0)$  代表初始汇率。两个概率值可以利用引理1和引理2中  $\theta$  和  $\omega$  的特征函数, 通过傅里叶逆变换公式:

$$P^* \{ X > x \} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re} \left[ \frac{\exp(-jux) \varphi_X(u)}{ju} \right] du}{ju}$$

计算而得。

注意, 由于跳跃的存在, 引理1和引理2中的特征函数都是级数求和的形式。在实际使用中, 我们不可能求无穷多项的和, 只能按精度要求取有限多项的和作为近似。由此可见, 定理虽然给出了期权价格的解析解, 但由于模型本身的复杂性使得解析解不容易应用, 所以 Monte Carlo 模拟等数值方法依然值得考虑。

### 3 模拟分析

在本节中, 我们使用 Monte Carlo 模拟来分析汇率的浮动限制对外汇期权的影响, 并绘图来展示受限和非受限模型下标的汇率变化方式的差异。为此, 我们首先设定一组参数:  $T = 1, r_d = 0.05, r_f = 0.04, \sigma = 0.3, b = 0.2, \lambda = 1, F(0) = 10, K = 8, n = 100$ 。由于汇率浮动约束一般是对称的, 所以不妨令  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ 。模拟通过 Matlab7.0 编程实现模拟路径为 10000 条。

表1 欧式看涨外汇期权价格

	$a = 0.3, \delta = 0.05$	$a = 0.3, \delta = 0.5$	$a = -0.3, \delta = 0.05$	$a = -0.3, \delta = 0.5$
非受限模型	2.7698	2.9251	2.8045	2.7237
受限模型	0.5497	2.3116	3.8057	2.7247

从表1中可以看出, 汇率浮动限制对期权价格会产生明显影响。对于表格中的前两列, 因为  $a = 0.3$ , 所以跳跃使得汇率整体向上变化, 从而对看涨期权来说价格应上升, 但汇率浮动限制的存在使这种正向影响受到遏制, 所以相对于非受限模型, 受限模型给出的价格更低。对于表格中的后两列, 因为  $a = -0.3$ , 所以跳跃使得汇率整体向下变化, 从而使得看涨期权价值下降, 但是由于汇率浮动限制的存在使得汇率下降受到遏制, 所以相对于非受限模型, 受限模型给出的价格更高。表格中的第一和第三列,  $\delta = 0.05$  代表汇率浮动限制相对于  $\delta = 0.5$  的第二和第四列更为严格。从而在第一和第三列中, 受限模型与非受限模型所给出的期权价格的差别明显大于第二和第四列中的差别。

图1和图2分别展示有约束和无约束模型下标的汇率变化方式的差异以及不同约束程度的差异。我们选择交易日  $n = 20$ , 其余参数用 Monte Carlo 模拟设定的参数相同。

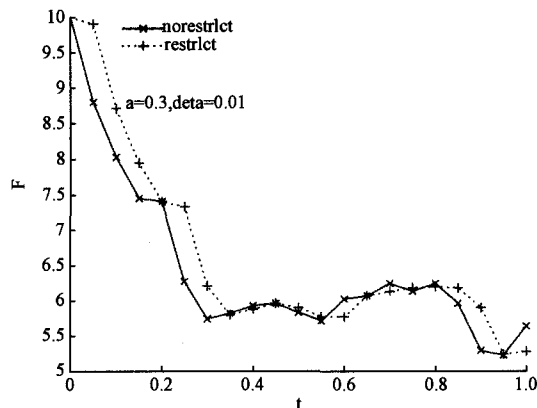


图1 严格约束

从这两张图上可以看出, 汇率浮动被限制的越严格, 即  $\delta$  越小, 受限模型和非受限模型下的标的汇率的运动轨迹差异越大。

### 4 总结

本文在一个受限的跳扩散模型下给出了欧式外汇期权的定价公式, 并通过 Monte Carlo 模拟展示了汇率管理政策

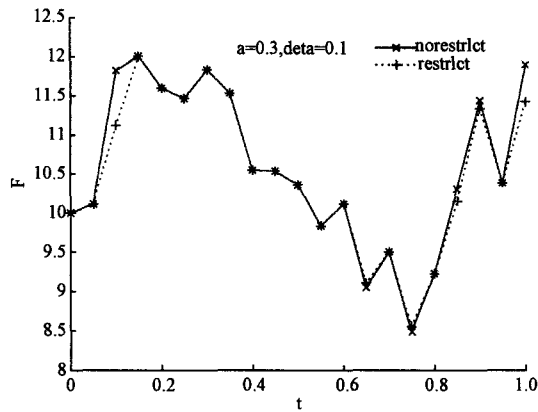


图2 宽松约束

对期权价格的影响。我们的研究还可以应用于股票市场、期货市场等存在价格限制的资产的期权定价问题。本文的研究方法也可以扩展到国内外利率都是随机过程或汇率满足随机波动模型等情形。

参 考 文 献

[ 1 ] Amin K, Jarrow R. Pricing foreign currency options under stochastic interest rates[J]. *Journal of International Money and Finance*, 1991, 10(3): 310 ~ 329.

[ 2 ] 陈荣达, 马庆国, 孙元. 基于汇率回报厚尾性的外汇期权组合非线性 VaR 模型[J]. *管理工程学报*, 2009, 23(3): 115 ~ 119.

[ 3 ] 陈荣达, 王韬, 肖德云. 基于 Delta-Gamma-Theta-Cornish-Fisher 模型的外汇期权风险度量[J]. *数量经济技术经济研究*, 2004, (11): 124 ~ 129.

[ 4 ] 陈荣达, 王韬, 肖德云. 基于多元 t-分布的外汇期权市场风险非线性 VaR 度量模型[J]. *管理工程学报*, 2006, 20(1): 58 ~ 61.

[ 5 ] Daal E, Madan D. An Empirical Examination of the Variance—Gamma Model for Foreign Currency Options[J]. *The Journal of Business*, 2005, 78(6): 2121 ~ 2152.

[ 6 ] Duan JC, Wei J Z. Pricing Foreign Currency and Cross-Currency Options Under GARCH[J]. *Journal of Derivatives*, 1999, 7(1): 51 ~ 63.

[ 7 ] Garman M, Kohlhagen S. Foreign currency option values[J]. *Journal of International Money and Finance*, 1983, 2(3): 231 ~ 237.

[ 8 ] Grabbe O. The pricing of call and put options on foreign exchange[J]. *Journal of International Money and Finance*, 1983, 2(3): 239 ~ 253.

[ 9 ] 胡日东, 王春峰, 李光泉. 结合购买力平价的外汇期权定价模型[J]. *数量经济技术经济研究*, 1997, (4): 44 ~ 46.

[ 10 ] Jiang G, Pan G, Shi L. Option Pricing When Changes of the Underlying Asset Prices Are Restricted [J]. *Journal of Mathematical Finance*, 2011, 1(2): 28 ~ 33.

[ 11 ] Jorion P. On Jump processes in the foreign exchange and stock markets[J]. *The Review of Financial Studies*, 1988, 1(4): 427 ~ 445.

[ 12 ] Levy E. Pricing Europe average rate currency options [J]. *Journal of International Money and Finance*, 1992, 11(5): 474 ~ 491.

[ 13 ] Melino A, Turnbull S. Pricing foreign currency options with stochastic volatility[J]. *Journal of Econometrics*, 1990, 45(1 - 2): 239 ~ 265.

[ 14 ] Merton R. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3(1 - 2): 125 ~ 144.

[ 15 ] 孙昊. 外汇期权交易的概念与应用[J]. *国际金融研究*, 1992, (7): 15 ~ 18.

[ 16 ] 孙昊. 外汇期权交易的理论价格及评价[J]. *国际金融研究*, 1994, (7): 10 ~ 14.

[ 17 ] 束景虹, 林桂军. 外汇期权预测短期汇率走势效力的经验分析[J]. *世界经济*, 2004, (9): 43 ~ 48.

[ 18 ] Shastri K, Tandon K. Valuation of American options on foreign currency[J]. *Journal of Banking and Finance*, 1987, 11(2): 245 ~ 269.

[ 19 ] Shreve S. *Stochastic Calculus for Finance II* [M]. New York: Springer, 2004, 484 ~ 485.

[ 20 ] 屠新曙, 巴曙松. 基于 Markov 骨架过程的外汇期权定价模型[J]. *国际金融研究*, 2001, (12): 12 ~ 17.

[ 21 ] 中山大学数学力学系. *概率论及数理统计(上册)* [M]. 北京: 人民教育出版社, 1982, 134.

Pricing Foreign Currency Option under Restriction

DU Kun<sup>1</sup>, WANG An-xing<sup>1,2</sup>

(1. School of finance, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China;  
2. Key Laboratory of Financial Information Technology Shanghai 200433, China)

**Abstract:** The previous literature about option pricing usually assumes that the underlying asset follows some kind diffusion process models. Black—Scholes (1973) assumes the underlying asset follows the Geometric Brownian motion. As underlying asset price may be discontinued, Merton (1976) suggested a jump-diffusion process model be used to describe it. Heston (1993) observe that the volatility of underlying asset price may change. Thus, he suggested that the underlying asset follows a stochastic volatility model. Given the underlying asset price behavior model, Black-Scholes (1973), Merton (1976) and Heston (1993) propose their own option

pricing formulas.

However, regulating asset price is common in the real world. For example, the range for RMB exchange rate is controlled with certain limit. In this situation the underlying asset price behavior models are not suitable for describing RMB exchange rate.

In this paper, we use a restricted jump—diffusion model to describe the dynamics of managed foreign exchange rate. At first we use Merton's (1976) model to describe exchange rate dynamics. If the daily change exceeds a given interval by exchange rate regulations, we use boundary value as the exchange rate. Otherwise, Merton's (1976) model is used. We propose three functions to analyze the exchange rate process based on the restricted jump—diffusion model. The restricted jump—diffusion model can properly describe the dynamics of managed exchange rate.

We derive the analytical price formula for European call option of foreign currency under our restricted jump-diffusion model using Fourier inverse. Using call-put parity, put option price formula can be easily obtained. Our proposed formula is similar to Black-Scholes-Merton's.

We ran the Monte Carlo simulation and the result shows that our restricted jump-diffusion model is significantly different from Merton's (1976) jump-diffusion model. Numerical solutions of European call option for our restricted jump-diffusion model and Merton's (1976) jump-diffusion model are derived by using the same parameters. The relationship between price regulation and option price is discussed with respect to the difference between our model and Merton's.

Our methodology can be used to compute European option price for the underlying asset following restricted jump—diffusion model, regardless whether the underlying asset is stock or future. In addition, the proposed model can be used to analyze pricing option with stochastic interest rate and stochastic volatility.

**Key words:** foreign currency option; managed exchange rate; Fourier inversion

中文编辑: 杜 健; 英文编辑: Charlie C. Chen

(上接第 80 页)

In section 1, we investigate the size effect using the Shanghai Stock Exchange database for the period 1996-2009 and find that for both adjusted and unadjusted risks, small firms are prone to earning greater returns than large firms in the following years: 1998, 2000, 2004, 2007, 2008 and 2009. However, some years, such as 1996 and 2003, also show the reverse size effect.

In section 2, different from the conventional research method this paper follows the direction created by Dimson and Marsh (1999), Mills and Jordanov(2003) and so on, and adopts the Markov chain method to study the size effect from the predictability aspect. It is found that large size portfolio is easier to reject the random walk hypothesis than the small size portfolio. A higher degree of predictability appears for the large size portfolio.

In section 3, the fundamental reasons for the size effect and its reverse phenomenon appearing in China's capital market are the manipulation of institutional investors and the absence of short-sale mechanism, especially for transaction-based and information-based manipulation. In addition, the absence of short-sale mechanism reinforces this phenomenon to a certain extent.

**Key words:** size effect; predictability; random walk hypothesis; Markov chains

中文编辑: 杜 健; 英文编辑: Charlie C. Chen