有关“霍尔姆斯特罗姆定理”的问题

左大培

（中国社会科学院 经济研究所，北京 100875）

摘要：霍尔姆斯特罗姆定理断言，在团队生产中不存在分享规则能够使团队生产同时达到帕累托效率和纳什均衡，并且使团队成员所获收入之和恰好等于该团队的产出。但是霍尔姆斯特罗姆对该定理的证明犯了数学运算上的错误。这样，一般性的霍尔姆斯特罗姆定理是不成立的。实际莱格罗斯和马修斯已证明了，附加了某些限制条件后，霍尔姆斯特罗姆定理才能够成立，在什么样的情况下霍尔姆斯特罗姆定理肯定不成立。

关键词：霍尔姆斯特罗姆定理；团队生产；预算约束；帕累托效率；纳什均衡

中图分类号：F069　文献标识码：A　文章编号：1005－2674（2017）04－035－09

崩特·霍尔姆斯特罗姆（Bengt Holmstrom）于2016年获得了诺贝尔经济学奖。“霍尔姆斯特罗姆定理”是崔之元对霍尔姆斯特罗姆在其论文《团队中的道德危害》（Moral Hazard in Teams）中表述的“定理1（Theorem1）的简称（崔之元称该定理为“赫姆斯特姆（Holmstrom）不可能定理”、“赫姆斯特姆定理”）。[1] 本文以下沿用这个简称。

“霍尔姆斯特罗姆定理”断言，在团队生产中不存在这样的分享规则（sharing rules）：它能够使团队生产同时达到帕累托效率和纳什均衡，并且使团队成员所分享的收入之和恰好等于该团队的产出。[2]326 团队生产的成员所分享的收入之和恰好等于该团队的产出，这通常被视为平衡团队预算的“预算约束”。霍尔姆斯特罗姆的论文强调，可以引入一个没有向团队生产投入的“委托人”（principal）来获取不平衡预算的分享规则下的剩余以放松预算约束，这样就可以使团队生产中的帕累托效率投入成为纳什均衡。[2]327～328

霍尔姆斯特罗姆提出这一“定理”的论文一发表就受到广泛重视，到处被人引用，连被视为数学难度最大、“水平最高”的西方微观经济学教科书——马斯·科莱尔（Mas－Collell）等人为美国哈佛大学写的《微观经济理论》都把它列为权威的参考文献。[3] 许多讨论工人管理企业问题的左派经济学家也把这个所谓的“霍尔姆斯特罗姆定理”及以此为基础的“打破预算约束”的制度设计当作不能避开的话题。

本文要说明的是，霍尔姆斯特罗姆的上述论文中对其“定理1”的数学论证犯了运算错误，这导致该“定理”的数学证明并不能证明该“定理”。本文中还将用简单的例子说明，像霍尔姆斯特罗姆论文中的“定理1”这样一般笼统地陈述的所谓“霍尔姆斯特罗姆定理”是不成立的。本文还将讨论莱格罗斯和马修斯（Legros and Matthews）对有效率的合伙制企业的论证，[4] 因为他们的这篇论文实际上说明了，在另外附加哪些条件的前提下“霍尔姆斯特罗姆定理”可以成立，在什么情况下“霍尔姆斯特罗姆定理”不能

收稿日期：2016－12－10

作者简介：左大培（1952－），男，辽宁大连人，中国社会科学院经济研究所研究员、博士生导师，主要从事西方经济史和当代西方经济学研究。

成立。

一、霍尔姆斯特罗姆所犯的数学运算错误

霍尔姆斯特罗姆的论文是用英文发表的。在说明他论证中所犯的数学运算错误时，为了避免语言翻译上的问题导致不必要的争论，本文在以中译文引用他论文的论述之后都在脚注中附上其英文原文。

该论文中表述“霍尔姆斯特罗姆定理”的原文是:

定理 1(Theoerm 1) . 不存在这样的分享规则$\{s_i(x)\}$，它满足公式(1) ，而且它生产出 a^* 以作为有着公式(2) 的支付的非合作博弈中的一个纳什均衡。①[2]326

该论文中明确指出: 此定理讨论的是团队生产的简单模型，[2]326有 n 个当事人。

假定: 标为 i 的每个当事人采取一个不可观察的行动 $a_i \in A_i = [0,\infty)$，带来一个私人的(非货币的) 成本 $v_i: A_i \to IR$。假设 $a = (a_1,\cdots,a_n) \in A = \overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i$，$a_{-i} = (a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n)$，$a = (a_i,a_{-i})$

假设 $S_i(x)$ 代表当事人 i 在成果 x. 中的一份。当事人 i 的偏好函数的形式为: $u_i(m_i,a_i) = m_i - v_i(a_i)$ 。我们问是否存在这样的分享规则 $S_i(x) \geqslant 0$，$i = 1,\cdots,n$，使得我们对所有的 x 都有预算平衡:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(x) = x \tag{1}$$

而有支付:

$$S_i(x(a)) - v_i(a_i),i = 1,\cdots,n \tag{2}$$

其非合作博弈有一个纳什平衡 a^*，它满足帕累托最优的条件:

$$a^* = \arg\max_{a\in A}[x(a) - \sum_{i=1}^{n} v_i(a_i)]. \tag{3}$$”②

该文在“定理 1”后面紧接着写到 “证明: 见附录”(Proof: SeeAppendix) 。

而该文的“附录”(Appendix) 就是“定理 1 的证明”(Proof of Theoerem 1,) : ③[2]339

假设 $s_i(x)$，$i = 1,\cdots,n$，是满足公式(1) 的任意分享规则。我将证明 a^* 是一个纳什均衡的假定将导致一个自相矛盾的说法(show that the assumption that a^* is a Nash equilibrium will lesd to a contradiction) 。

由纳什均衡的定义:

$$S_i(x(a_i,a^*_{-i})) - v_i(a_i) \leqslant s_i(x(a^*)) - v_i(a^*_i),\forall a_i \in A_i \tag{A1}$$

假设$\{\alpha^{\mathrm{I}}\}$是收敛到 $x(a^*)$ 的一个严格递增的实数序列。假设$\{a_i^{\mathrm{I}}\}$是相应的满足下式的 n 个序列:

$$\alpha^{\mathrm{I}} = x(a_i^{\mathrm{I}},a^*_{-i}) \tag{A2}$$

帕累托最优意味着: $v_i'(a_i^*) = x_i'(a^*)$，$\forall i$. 使用式(A2) ，这又意味着:

$$v_i(a_i^*) - v_i(a_i^I) = x(a^*) - x(a_i^{\mathrm{I}},a^*_{-i}) + o(a_i^{\mathrm{I}} - a_i^*),\forall i,\forall \mathrm{I}$$

在这里，$o(h)/h \to 0$，当 $h \to 0$。

将其代入式(A1) ，使用式(A2) 得:

$$x(a^*) - \alpha^{\mathrm{I}} + o(a_i^{\mathrm{I}} - a_1^*) \leqslant s_i(x(a^*)) - s_i(\alpha^{\mathrm{I}},)\ \forall i,\forall \mathrm{I}. \tag{A3}$$

将有不同 i 的各个(A3) 加总求和，运用式(1) ，重新整理并乘以 $n/(n-1)$，这样得出:

$$\sum_{i=1}^{n}\{x(a^*) - \alpha^{\mathrm{I}} + o(a_i^{\mathrm{I}} - a_i^*)\} \leqslant 0,\forall I$$

它可以写为:

$$\sum_{i=1}^{n}\{-x_i'(a^*)(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)+o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\}\leqslant 0,\forall\ \mathrm{I} \quad (\mathrm{A4})$$

因为根据 α^{I} 的选择，$\alpha^{\mathrm{I}}<x(a^*)$，以及 $x_i'(a^*)\neq 0$，括号中的第一项是严格正的。对于足够大的 1，这一项具有压倒地位(dominates)，这与公式(A4)相抵触(contradicts(A4))。因此，a^* 是一个纳什均衡的假定导致了一个自相矛盾的说法并且必定是谬误的。证毕。

霍尔姆斯特罗姆在上述的证明过程中犯了明显的运算错误，因此这个证明是不成立的。

这个运算错误发生在将有不同的 i 的各个(A3)加总求和这一步上：将 i 从 1 到 n 的 n 个不等式 $x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}+o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\leqslant s_i(x(a^*))-s_i(\alpha^{\mathrm{I}})$ 的两边分别相加，不等号左边这样相加的结果是 $\sum_{i=1}^{n}\{x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}+o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\}$；不等号右边这样相加的结果是 $\sum_{i=1}^{n}s_i(x(a^*))-\sum_{i=1}^{n}s_i(\alpha^{\mathrm{I}})$。这样将有不同的 i 的(A3)加总求和直接得出的结果是不等式：

$$\sum_{i=1}^{n}\{x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}+o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\}\leqslant\sum_{i=1}^{n}s_i(x(a^*))-\sum_{i=1}^{n}s_i(\alpha^{\mathrm{I}}) \quad (\mathrm{B1})$$

使用公式(1)即：$\sum_{i=1}^{n}s_i(x)=x$，可得：$\sum_{i=1}^{n}s_i(x(a^*))=x(a^*)$，$\sum_{i=1}^{n}s_i(\alpha^{\mathrm{I}})=\alpha^{\mathrm{I}}$。因此，将有不同 i 的各个(A3)加总求和，运用式(1)，得出的不等式应当是：

$$\sum_{i=1}^{n}\{x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}+o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\}\leqslant x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}} \quad (\mathrm{B2})$$

霍尔姆斯特罗姆的论文中已经定义了：$\alpha^{\mathrm{I}}<x(a^*)$，因此：$x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}>0$。将式(B2)与式(A4)不等式，即：$\sum_{i=1}^{n}\{x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}+o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\}\leqslant 0$，比较一下就可知，式(A4)左边的各项之和不是不大于零，而是不大于一个正数 $x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}$，霍尔姆斯特罗姆得出公式(A4)是由于他在由式(A3)推导式(A4)的过程中犯了数学运算的错误。

霍尔姆斯特罗姆的论文在由式(A3)推导式(A4)时不是简单地“将有不同 i 的各个(A3)加总求和，运用式(1)”，而是还附加了“重新整理并乘以 $n/(n-1)$”这样多余的运算。但是这两步是多余的运算，也不可能使式(A4)成立。我们可以对不等式(B2)再作重新整理：两边都减去 $x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}$ 得不等式：

$$(n-1)\cdot[x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}]+\sum_{i=1}^{n}o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\leqslant 0 \quad (\mathrm{B3})$$

再将两边都乘以 $n/(n-1)$，得不等式：

$$n\cdot[x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}]+\frac{n}{n-1}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\right]\leqslant 0$$

也即：

$$\sum_{i=1}^{n}\{x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}+o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\}+\frac{1}{n-1}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\right]\leqslant 0 \quad (\mathrm{B4})$$

将的式(B4)与霍尔姆斯特罗姆的论文中的式(A4)不等式，即：$\sum_{i=1}^{n}\{x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}+o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\}\leqslant 0$，对比一下就可以看出来，霍尔姆斯特罗姆的数学运算错在哪里。

这个数学运算错误对霍尔姆斯特罗姆的“定理 1 的证明”是致命的。霍尔姆斯特罗姆明确说，他的证明全靠“证明 a^* 是一个纳什均衡的假定将导致一个自相矛盾的说法”，而他得出的这个“自相矛盾的说法”又集中反映在他得出的公式(A4)上：他最后的论证断论公式(A4)不等号的左边 $\sum_{i=1}^{n}\{x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}+o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\}$ 大于零，而公式(A4)却表明 $\sum_{i=1}^{n}\{x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}+o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\}$ 不大于零，这就产生了他说的“自相矛盾的说法”。但是，这个“自相矛盾的说法”只是霍尔姆斯特罗姆自己的数学运算错误产物。正

确的计算表明$\sum_{i=1}^{n}\{x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}+o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\}$不大于的是一个正数 $x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}$，$\sum_{i=1}^{n}\{x(a^*)-\alpha^{\mathrm{I}}+o(a_i^{\mathrm{I}}-a_i^*)\}$大于零本身不会导致什么“自相矛盾的说法”。

霍尔姆斯特罗姆的“定理 1 的证明”，靠的只是算出一个公式(A4)并证明它会导致“自相矛盾的说法”。而实际上，公式(A4)只是霍尔姆斯特罗姆自己数学运算错误的产物，正确的数学运算只能表明霍尔姆斯特罗姆说的“自相矛盾的说法”不存在。这样，霍尔姆斯特罗姆的“定理 1 的证明”就由于犯了数学运算的错误而不成立，霍尔姆斯特罗姆在自己这篇论文中并没有证明他的“定理 1”所宣称的“霍尔姆斯特罗姆定理”。

二、一个反面的例子

我们可以举出一个简单的反面例子，表明在一种特定的情况下，“霍尔姆斯特罗姆定理”不成立，可以为团队生产设立一种有效率的分享规则来使团队生产同时达到帕累托效率和纳什均衡，并满足平衡团队预算的“预算约束”。在这种情况下，团队生产的成果是团队成员行动的里昂惕夫函数，团队的所有成员都有同样的偏好函数。

这种情况下的 n 个当事人从事一种团队生产。该团队生产的成果(outcome) x 是这 n 个当事人的行动(action) a 的“里昂惕夫函数”：

$$X(a)=\min\left(\frac{a_1}{n},\cdots,\frac{a_i}{n},\cdots,\frac{a_n}{n}\right) \tag{B5}$$

对于这 n 个当事人的偏好函数：$u_i(m_i,a_i)=m_i-v_i(a_i)$，$v_i$ 对 a_i 的一阶导数 v_i' 而言，在 $a_i=0$ 时等于零，而在 a_i 大于零时大于零，且 v_i' 随着 a_i 的增加而递增。这 n 个当事人有同样的偏好函数：$u_i(m_i,a_i)=m_i-v_i(a_i)$。这意味着对这 n 个当事人中的任意两个当事人 i 和 j，如果 $m_i=m_j$ 且 $a_i=a_j$，则 $v_i(a_i)=v_j(a_j)$，且满足：$u_i(m_i,a_i)=u_j(m_j,a_j)$。

对这样的团队，由团队的 n 个成员平均分享团队生产成果 x 的简单分享规则，就足以使团队生产同时达到帕累托效率和纳什均衡，并满足平衡团队预算的“预算约束”。以下是对这一论点的简要论证。

在由团队的 n 个成员平均分享团队生产成果 x 的分享规则下：

$$s_i(x)=\frac{x}{n}=m_i \tag{B6}$$

在这样的分享规则下：

$$\sum_{i=1}^{n}s_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{n}\right)=x \tag{B7}$$

这样的分享规则总是满足平衡团队预算的“预算约束”。

团队成员达到帕累托效率的行动向量 a^* 会使 $x(a)-\sum_{i=1}^{n}v_i(a_i)$ 最大化。

这样的帕累托效率首先要求团队的各个成员采取的行动数值相同，也即对该团队 n 个成员中的任意两个成员 i 和 j 恒有：$a_i=a_j$。这是因为：即便图案随所有其他成员都采取了行动 a'，只有第 i 个成员采取了行动 a_i 且 $a_i>a'$，则根据式(B5)，$x(a)$ 只能等于$\frac{a'}{n}$，$v_i(a_i)$ 却大于团队其他成员 $v_j(a')$，其中 $j\neq i$。在这种情况下，团队的第 i 个成员将其行动从 a' 降低到 a_i 不会减少 $x(a)$，却降低了 v_i，从而减少了$\sum_{i=1}^{n}(a_i)$，并因此会增大 $x(a)-\sum_{i=1}^{n}v_i(a_i)$。这样，团队成员达到帕累托效率的行动向量必定是团队的各个成

员采取的行动数值相同。

将团队的所有 n 个成员都采取的这个数值相同的行动记为 a，这种情况下团队生产的成果就是 $x(a)=\frac{a}{n}$，团队成员达到帕累托效率的行动向量 a^* 要最大化的是 $x(a)-\sum_{i=1}^{n}v_i(a)$。由于团队的这所有 n 个成员都有相同的 v 函数，还可以将团队成员达到帕累托效率的行动向量 a^* 要最大化的目标函数改写为：$x(a)-n\cdot v_i(a)$。

将目标函数 $x(a)-n\cdot v_i(a)$ 对 a 求一阶导数，并令其等于零，就得到团队达到帕累托效率的行动向量 a^* 必须满足的一阶条件：

$$x'(a^*)=n\cdot v_i'(a^*)$$

因为，在这种情况下有：$x(a)=\frac{a}{n}$，故有：$x'(a^*)=\frac{1}{n}$。因此团队成员达到帕累托效率的行动量 a^* 必须满足的一阶条件就为：

$$v_i'(a^*)=\frac{1}{n^2} \tag{B8}$$

容易证明团队成员的这个达到帕累托效率的行动向量 a^* 也会是该团队的生产达到纳什均衡。根据式(B6)：

$$u_i(m_i,a_i)=m_i-v_i(a_i)=\frac{x(a)}{n}-v_i(a_i) \tag{B9}$$

如果团队其他成员的行动都为 a^*，则在 $a_i<a^*$ 的情况下有：$x(a)=\frac{a_i}{n}$，$u_i(m_i,a_i)=\frac{a_i}{n^2}-v_i(a_i)$，$\frac{\partial u_i(m_i,a_i)}{\partial a_i}=\frac{1}{n^2}-v_i'(a_i)$。由于：$v_i'(a^*)=\frac{1}{n^2}$，且 v_i' 随着 a_i 的增加而递增，则当 $a_i<a^*$ 时，$\frac{\partial u_i(m_i,a_i)}{\partial a_i}=\frac{1}{n^2}-v_i'(a_i)>0$；只在 $a_i=a^*$ 的极限情况下才有：$\frac{\partial u_i(m_i,a_i)}{\partial a_i}=0$。这意味着在 $a_i<a^*$ 的情况下，恒有：$u_i(m_i,a_i)<u_i(m_i,a^*)=\frac{a^*}{n^2}-v_i(a^*)$。而如果 $a_i>a^*$，则 $x(a)$ 只能等于 $\frac{a^*}{n}$，$u_i(m_i,a_i)=\frac{a^*}{n^2}-v_i(a_i)$。由于这种情况下，$v_i'>0$ 且 $a_i>a^*$，$v_i(a_i)>v_i(a^*)$，并且：$u_i(m_i,a_i)=\frac{a^*}{n^2}-v_i(a_i)<u_i(m_i,a_i)=\frac{a^*}{n^2}-v_i(a_i)$。所以团队其他成员的行动都为 a^* 时，a^* 也是团队的第 i 个成员最偏好的对其个人最优的行动。

这样，给定团队其他成员的行动都为式(B8)规定的 a^*，a^* 是该团队任何成员对其个人最优活动。该团队所有成员采取式(B8)规定的那个行动 a^*，就会使该团队的生产达到纳什均衡。而定义了 a^* 的那个式(B8)本来是该团队的生产达到帕累托效率的一阶条件。这样，同时达到纳什均衡和帕累托效率的团队成员行动向量 a^*，又是在总是满足平衡团队预算的“预算约束”的分享规则(B6)下生产的。因此，只要团队生产的成果是团队成员行动的里昂惕夫函数，团队的所有成员都有同样的偏好函数，一个简单的平均分享团队生产成果的分享规则，就足以是团队生产同时达到帕累托效率和纳什均衡，并满足平衡团队预算的“预算约束”。

在本节所说的这种特定情况下，团队生产的成果是团队成员行动的里昂惕夫函数，团队的所有成员都有同样的偏好函数。在这种情况下，简单地平均分享团队生产成果的分享规则不仅满足了平衡团队预算的“预算约束”，而且使该团队的生产同时达到了帕累托效率和纳什均衡。这是否定“霍尔姆斯特罗姆定理”的一个反面的例子，仅仅这一个反面例子就足以证明，像霍尔姆斯特罗姆在其论文中那样一般性地陈述的所谓“霍尔姆斯特罗姆定理”是不成立的。

三、附加另外的限制条件

“霍尔姆斯特罗姆定理”断言，在团队生产中不存在这样的分享规则：它满足平衡团队预算的“预算约束”，又能够使团队生产同时达到帕累托效率和纳什均衡。而本文前边举的反面例子则表明，在团队生产的成果是团队成员行动的里昂惕夫函数、团队的所有成员都有同样的偏好函数的情况下，简单地平均分享团队生产成果的分享规则就能够不仅满足平衡团队预算的“预算约束”，而且使该团队的生产同时达到帕累托效率和纳什均衡，从而使“霍尔姆斯特罗姆定理”不成立。这个反面的例子也提醒我们：是否再另外附加上某些其它的限制条件，“霍尔姆斯特罗姆定理”就可以在这些附加条件限制下成立？

实际上，只要附加上团队生产的成果是团队成员行动的可导增函数这样一个限制条件，“霍尔姆斯特罗姆定理”就可以成立。正是霍尔姆斯特罗姆本人作出了在这样另外附加的限制条件下对“霍尔姆斯特罗姆定理”的论证。

霍尔姆斯特罗姆在其论文中定义：“当事人们的行动决定了一个结合的货币成果 $x: A\to IR$”。“假定函数 x 是严格递增、凹的和可微的且 $x(0)=0$”。[④][2]326

以此为基础，再加上前边已经引证过得公式(1)、(2)和(3)中规定的前提条件，霍尔姆斯特罗姆进一步论证道[⑤]：[2]326

如果分享规则是可微的，我们就发现，因为 a^* 是一个纳什均衡：

$$s_i' x_i' - v_i' = 0, i = 1, \cdots, n, \tag{4}$$

在这里 $x_i' \equiv \partial x/\partial a_i$。帕累托最优意味着：

$$x_i' - v_i' = 0, i = 1, \cdots, n, \tag{5}$$

公式(4)与公式(5)的一致要求：$s_i'=1, i=1,\cdots,n$。但是这与公式(1)相冲突，因为对公式(1)求微分意味着：

$$\sum_{i=1}^{n} s_i' = 0 \tag{6}$$

因此，在可微的分享规则下我们不能达到有效率的纳什均衡。

基于上述分析，霍尔姆斯特罗姆本来可以得出这样一个“有限制条件的霍尔姆斯特罗姆定理”：在成果是团队成员行动的严格增、可导且凹的函数的团队生产中，不存在这样的可微分享规则，它满足平衡团队预算的“预算约束”，又能够使团队生产同时达到帕累托效率和纳什均衡。

霍尔姆斯特罗姆论文中围绕着公式(4)到公式(6)的分析已经证明了上述“有限制条件的霍尔姆斯特罗姆定理”成立，它也与上节我们举的那个反面的例子不发生冲突。在我们上节举的那个表明“霍尔姆斯特罗姆定理”不成立的反面例子中，团队生产的成果是团队成员行动的“里昂惕夫函数”，而里昂惕夫函数并不是可导的严格增函数。

但是，霍尔姆斯特罗姆不想限于得出这样一个“有限制条件的霍尔姆斯特罗姆定理”。他在其论文的公式(6)后面接着写道“因此，在可微的分享规则下我们不能达到有效率的纳什均衡。同样的东西也是更一般地正确的，像在随后的…定理 1…中陈述的那样”。[2]326这个“定理 1”就是那个著名的“霍尔姆斯特罗姆定理”。为了将它与前边所说的“有限制条件的霍尔姆斯特罗姆定理”区别开来，我们以后将它称为“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”。

本文前文已经说明，霍尔姆斯特罗姆论文中对这个“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”的论证犯了数

学运算错误，因而该论文未能证明这个“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”成立；本文前文举的反面例子也足以说明这种“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”是不成立的。能够成立的是“有限制条件的霍尔姆斯特罗姆定理”，霍尔姆斯特罗姆想将它更一般化，结果是犯了简单的数学错误而提出了一个不成立的定理。这正应了一句俗语：真理再前进一步就是谬误。

“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”所犯的错误影响深远。据笔者本人看到的西方主流经济学文献，不仅霍尔姆斯特罗姆的那篇一开头就提出这个不成立的定理的论文被视为经典文献而到处被引用，而且引用者谈到的差不多都是这个不成立的“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”，几乎没有人提到真正能够成立的是“有限制条件的霍尔姆斯特罗姆定理”。笔者更是没有看到任何人公开指出霍尔姆斯特罗姆论文中对“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”的证明犯了致命的数学运算错误。

尽管如此，我们还是可以根据现有的文献推测，西方主流经济学界中也早就有人看出霍尔姆斯特罗姆那篇论文中对“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”的证明不成立，只是被真相不明的原因所限未能公开指出霍尔姆斯特罗姆论文中的数学运算错误而已。明显地看出了并力图纠正霍尔姆斯特罗姆的错误的是莱格罗斯和马修斯，他们两人的论文《有效率的和接近有效率的合伙关系》[4] 以抽象的数学模型讨论了合伙关系（*partnership*）有效率的条件，其中涵盖了霍尔姆斯特罗姆论文讨论的团队生产问题，婉转地指出了霍尔姆斯特罗姆论文的错误之处。

莱格罗斯和马修斯讨论的“合伙关系”满足平衡团队预算的“预算约束”，它的效率就是霍尔姆斯特罗姆所说的“帕累托效率”。莱格罗斯和马修斯的论文讨论“合伙关系”中的效率在什么情况下是“可支撑的”（*sustainable*），而这种“可支撑的”效率意味着“合伙关系”成员有效率的行动向量是一个纳什均衡。[4]601 这就是说，莱格罗斯和马修斯说的“合伙关系”中的效率是“可支撑的”，就相当于说有满足平衡团队预算的“预算约束”的分享规则能够使团队生产同时达到帕累托效率和纳什均衡，从而“霍尔姆斯特罗姆定理”不成立。

若霍尔姆斯特罗姆论文中陈述的那个“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”成立，则任何实行团队生产的“合伙关系”中的效率就都不是“可支撑的”。而莱格罗斯和马修斯在概括说明他们以抽象的数学模型分析所获的结论时却说：霍尔姆斯特罗姆 1982 年的论文证明，在某些单调可微的合伙关系中，没有分享规则能够引出有效率的行动集合。而事实上，在那样一些有趣的合伙关系下，诸如在可能的行动数目有限的普通合伙关系下，或者在那些合伙人们的行动完全互补的普通合伙关系（里昂惕夫合伙关系）下，效率是可支撑的。[2]599

在本文第二节举出的说明“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”不成立的反面例子中，团队生产的成果是团队成员行动的里昂惕夫函数，基于这样的团队生产的合伙关系就是莱格罗斯和马修斯说的“里昂惕夫合伙关系”。莱格罗斯和马修斯说，在“里昂惕夫合伙关系”和其它某些合伙关系下效率是可支撑的，这就等于说，在这样一些情况下“霍尔姆斯特罗姆定理”不成立，从而“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”不成立。

莱格罗斯和马修斯的论文中对“霍尔姆斯特罗姆定理”的引证特别耐人寻味。莱格罗斯和马修斯的论文中所说的霍尔姆斯特罗姆 1982 年的论文中“证明”的，并不是“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”，而是“有限制条件的霍尔姆斯特罗姆定理”，这种“有限制条件的霍尔姆斯特罗姆定理”只限于讨论成果是团队成员行动的可导严格增函数的团队生产，在这样的团队生产下才能形成单调可微的合伙关系。可是在霍尔姆斯特罗姆的论文中，正式地在“定理 1”中作为定理表述出来的是“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”。霍尔姆斯特罗姆的这篇论文虽然也提到了甚至论证了“有限制条件的霍尔姆斯特罗姆定理”，但是并未明确地将它作为一个定理写出来。莱格罗斯和马修斯的论文只讲霍尔姆斯特罗姆论文中没有正

式地表述的“有限制条件的霍尔姆斯特罗姆定理”，不提霍尔姆斯特罗姆论文中正式地作为定理表述的“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”，这种反常的引证方式说明，莱格罗斯和马修斯非常清楚，霍尔姆斯特罗姆论文的“定理 1”中表述的“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”是不成立的。

由于莱格罗斯和马修斯的论文以数学模型的推导为基础，他们回避引用“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”的做法表明，他们不但知道“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”是不成立的，而且一定知道霍尔姆斯特罗姆对这个定理的证明犯了致命的数学运算错误。但是，他们在这篇论文中竟没有再多写两句话来指出霍尔姆斯特罗姆犯了数学运算错误、“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”不成立。

为什么莱格罗斯和马修斯的论文不提霍尔姆斯特罗姆犯的数学运算错误，不提“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”不成立？莱格罗斯和马修斯的这篇论文 1993 年发表在学术杂志《经济研究评论》(*Review of Economic Studies*) 上，发表时按学术杂志的惯例在文章标题下注明“1989 年 11 月收到第一个文本；1993 年二月接受最终文本”。作者与杂志编辑部讨论并修改这篇论文竟用了 3 年多的时间，这本身就够惊人的。我们有理由推测，莱格罗斯和马修斯最初向该杂志投稿时谈到过霍尔姆斯特罗姆犯了数学运算错误、“一般性的霍尔姆斯特罗姆定理”不成立，而在以后长时间讨论和修改的过程中删去了这些论述。

注　释

①其英文是原文是：

“Theoerm 1. There do not exiet sharing rules $\{s_i(x)\}$ which satisfy (1) and which yield a* as a Nash equilibrium in the non-cooperative game with payoffs(2).”

②以上所引的英文原文是：

“simple molde of team production. There are n agents. Each agent, indexed, takes a nonobservable action $a_i \in A_i = [0, \infty)$, with a private (nonmonetary) cost $v_i: A_i \to IR$”. “Let $a = (a_1, \cdots, a_n) \in A = \overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i$ and write $a_{-i} = (a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots a_n)$, $a = (a_i, a_{-i})$.”

“Let $s_i(x)$ stand for agenti's share of the outcome x..” “The preference function of agent i is” “of the form $u_i(m_i, a_i) = m_i - v_i(a_i)$.” “we ask whether there exist sharing rules $s_i(x) \geqslant 0, i = 1, \cdots n$, such that we have budget - balancing

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(x) = x \quad \text{for all x}, \tag{1}$$

“and the noncooperative game with payoffs,

$$S_i(x(a)) - v_i(a_i), i = 1, \cdots, n, \tag{2}$$

“has a Nash equilibrium a^*, which satisfies the condition for Pareto optimality,

$$a^* = \arg\max_{a \in A} \bullet [x(a) - \sum_{i=1}^{n} v_i(a_i)]. \tag{3}$$”

③英文原文为：

“Let $s_i(x)$, $i = 1 \cdots, n$, be arbitrary sharing runles satisfying(1). I shall show that the assumption that a* is a Nash equilibrium will lead to a contradiction.

“From the definition of a Nash equilibrium

$$S_i(x(a_i, a^*_{-i})) - v_i(a_i) \leqslant s_i(x(a^*)) - v_i(a_i^*), \forall a_i \in A_i, \tag{A1}$$

“Let $\{\alpha^I\}$ be a strictiy increasing sequence of real numbers connerging to $x(a^*)$. Let $\{a_i^I\}$ be the corresponding n sequences satisfying

$$\alpha^I = x(a_i^I, a^*_{-i}) \tag{A2}$$”

“*Paretooptimalityimplies* $v'_i(a_i^*) = x'_i(a^*)$, $\forall$ i. *This in turn implies*, *using*(*A2*), *that* $v_i(a_i^*) - v_i(a_i^I) = x(a^*) - x(a_i^I, a^*_{-i}) + o(a^I i - a_i^*)$ $\forall$ i, $\forall$ 1, *where* o(h)/h→0 *as* h→0. *Substituting into*(*A1*), *using*(*A2*) *gives*

$x(a^*) - \alpha^I + o(a_i^I - a_i^*) \leqslant s_i(x(a^*)) - s_i(x(a^I)), \forall i, \forall 1.$ (A3)

“Sum(A3) over i, use(1), rearrange and multiply by $n/(n-1)$. This gives:

$\sum_{i=1}^{n}\{x(a^*) - \alpha^I + o(a_i^I - a_i^*)\} \leqslant 0, \forall 1,$ (A4)

“which can be written”

$\sum_{i=1}^{n}\{-x_i'(a^*)(a_i^I - a_i^*) + o(a_i^I - a_i^*)\} \leqslant 0, \forall 1$ (A4)

“Since $\alpha^I < x(a^*)$ by the choice of α^I, and $x_i'(a^*) \neq 0$, the first term in the bracket is strictly positive. For large enough 1, this term dominates, which comtradicts(A4). Hence, the assumption that a^* is a Nash equilibrium has led to a contradiction and must be false. Q. E. D. ”

④**英文原文为:**

“The agents´ actions adetermine a joint monetary outcone $x: A \to IR$”. “The function x is assumsd to be strictily increasing con-cave, and differentiable with $x(0) = 0$”.

⑤**英文原文为:**

“If the sharing rules are differentiable, we find since a^* is a Nash equilibrium, that

$s_i' x_i' - v_i' = 0, i = 1, \cdots, n,$ (4)

“where $x_i' \equiv \partial x / \partial a_i$. Pareto optimality implies that

$x_i' - v_i' = 0, i = 1, \cdots, n,$ (5)

“Consistency of (4) and(5) requires $s_i' = 1, i = 1, \cdots, n,$. But this is in conflict with (1), since differentiating (1) implies”

$\sum_{i=1}^{n} s_i' = 1$ (6)

“Therefore, withdifferentible sharing rules we cannot reach efficient Nash equilibria. ”

参考文献

[1] 崔之元. 美国二十九个州公司变革的理论背景[J]. 北京: 经济研究, 1996, (04): 35-40, 60.

[2] Holmstrom, Bengt (Moral Hazard in Teams[J]. The BellJournal of Economics, 1982, 13(02).

[3] Mas-Colell, Andreu, Whinston, Michael D. and Green, Jerry R. Microeconomic Theory[M]. Oxford: Oxford University Press, Inc. 1995: 506.

[4] Legros, Partrick, Matthews, Steven A. Efficient and Nearly-effcient Partnerships[J]. Review of Economic Studies, 1993, 68: 599-611.

责任编辑: 黎贵才

An Overall Analysis of the Relations of Production in Das Kapital

Zhang Leisheng

Abstract: The study of Das Kapital on the relations of production involves many aspects, which are manifested as the study from the perspectives of communication relationship, the basis of ownership of means of production, the general stipulation and the change of development of productive forces. These level of study reflect the continuous enrichment and development of Marx's understanding of relations of production in the process of creating the Marxist political economics. They are fully and completely shown in Das Kapital as a whole.

Government Fiscal Expenditure and Entrepreneurship ——An Empirical Study Based on CGSS2012 Data

Song Donglin, Jiang Yang

Abstract: Based on the CCSS data of 2012, this paper uses the ordered probability model to examine the scale and structure of fiscal expenditure and its impact on entrepreneurial activities. The basic conclusions are as follows:(1) on the whole, the scale of fiscal expenditure has little effect on improving the probability of individual entrepreneurship and the simple expansion of the scale of fiscal expenditure can not effectively promote entrepreneurship;(2) from the perspective of the structure of fiscal expenditure, the fiscal expenditure, which can lower the restriction on capital of entrepreneurs and enhance the risk affordability of individuals after entrepreneurial failure, can significantly enhance the entrepreneurial probability of individuals, but the fiscal expenditure which can improve entrepreneurial environment does not have significant impact on entrepreneurship; (3) from the perspective of the entrepreneurial types, the impact of fiscal expenditure on "opportunistic" entrepreneurship and the impact of it on overall entrepreneurship are not quite different, but the effect of various items of fiscal expenditure on the enhancement of the probability is not significant for the "survival" type of entrepreneurship.

The Issue about the "Holmstrom Theorem"

Zuo Dapei

Abstract: Holmstrom theorem asserts that, if there is no rule of sharing in team production, it can achieve Pareto efficiency and Nash equilibrium at the same time and make the total income of team members be precisely equivalent to the output of the team. However, Holmstrom made a mathematical error on the proof of the theorem. In this way, the general Holmstrom theorem does not apply. Legros and Mathews have proved with which limiting conditions can Holmstrom theorem apply and in what circumstances can Holmstrom theorem definitely not apply .

The Answer to "Dispute of Nature" of Das Kapital and Its "Historical Phenomenology"

Liu Guixiang, Tuo Beilin

Abstract: The nature of Das Kapital has always been debated in academia to successively form three representative views of scientific, philosophical and social critical theories. In fact, viewing from the methodological premise of Das Kapital and its manuscript, the historical reduction of capital or the mechanism of production of mankind "historical mystery", the nature of Das Kapital is a historical phenomenon that reveals the truth of the existence of mankind and it is a fundamental solution to the mankind "historical mystery", while such solution runs through the Marxist thought.