供给过剩条件下双寡头非合作博弈模型研究

左大培[a]，康　迎[b]，陈宇鸣[b]

（中国社会科学院 a. 经济研究所；b. 经济学院，北京 102488）

摘要：戴维逊（Carl Davidson）和德奈克尔（Raymond Deneckere）于 1986 年发表的双寡头两阶段博弈文章，为通过数学模型说明市场经济中产品市场上的供给过剩提供了基础。但是其数量化推论本身却存在着不少漏洞甚至错误，该文对大厂商战略支撑集上界断点的讨论存在着根本性的疏忽，其数学推导并不能证明断点存在性。模型以产品供不应求时决定哪些购买者能够买到产品的“按比例配给规则”为基础，证明在市场出清的价格上，如果需求的价格弹性小于 1，各企业产品供给给定下的价格博弈就只能有混合战略均衡，每个企业所有可能的产品报价都会高于使市场出清的产品价格。戴维逊和德奈克尔的论文有其意义和贡献，论文的漏洞和错误则需要补充和纠正。

关键词：寡头垄断；供给过剩；价格博弈；混合战略均衡

中图分类号：F016　文献标识码：A　文章编号：1005－2674（2021）07－048－13

一、引　　言

西方主流微观经济理论的一个主要特征是，认定产品市场上的需求总是等于供给。在按这样的供求均衡范式推导出的数学模型中，产品的售价既不会过低也不会过高，而是达到恰好使该售价上的产品需求等于产品供给的程度。马歇尔（Alfred Marshall）的局部均衡和瓦尔拉斯（Léon Walras）的一般均衡理论是供求相等的典型。

主流的微观经济理论已经发展出了完全竞争、完全垄断、寡头垄断甚至垄断竞争等不同的市场模型，寡头垄断的早期模型由古诺（Antoine A. Cournot）和伯特兰德（Joseph Bertrand）建立。古诺模型以产量做战略空间，价格由市场供求决定。伯特兰德模型以价格做战略空间，得到和完全竞争相同的均衡：价格等于边际成本。但是在这些模型中，产品价格使需求恰好等于供给这一点，却几乎是共同的特征，只有寡头垄断中的伯特兰德模型有可能成为例外[1]。

这种供求均衡的理论模型明显不符合市场经济的现实。在现实的市场经济中，商家从来都感到需求相对于其产品供给是不足的，在现行的产品售价下，商家总有卖不出去的过剩产品，企业也总是因为需求不足而有过剩的产能没有利用。显然，普遍存在的实际情况应当是：产品销售价格过高，高到了没有足够的需求来购买已经生产出来的产品。

或许正是因为对供求均衡模型不合乎实际的情况不满意，学界近几十年对于寡头定价的理论分析，

收稿日期：2021－04－02

作者简介：左大培（1952－），男，辽宁大连人，中国社会科学院经济研究所研究员、博士生导师，主要从事西方经济史和当代西方经济学研究。

也发展出了一些打破供求均衡范式的理论模型[1]。在这些会导出产品市场供大于求结论的理论模型中，戴维逊(Carl Davidson)和德奈克尔(Raymond Deneckere)在1986年发表的一篇文章中所提出的模型最有理论上的说服力，因而可以将他们这篇文章中的模型用作解释产品市场上供给过剩现象的基本理论模型[2]。不过，这篇文章对模型的数学推导说得太少，特别是没有清楚地阐述他们的模型可以导出的解释产品供给过剩的基本原理，不仅在数学模型的阐释上有一些重大的遗漏，而且在数学推导上也存在一些问题。本文将对戴维逊和德奈克尔的文章所依据的基本原理作一个大致的阐释，并对该文中的错误和遗漏进行详尽的修正和补充。

二、产品的市场需求函数

戴维逊和德奈克尔的文章以古诺有关寡头垄断下的产量和价格的著名模型为出发点，把古诺均衡放到一个两阶段博弈的框架中进行分析。他们使用博弈论中标准的后向归纳，先求出两个企业在它们给定的产能组合下最优的产品售价，然后再倒过来根据产能组合与最优产品售价之间的函数关系确定各企业在博弈第一阶段的最优产能。不过，模型得出的结论却与古诺模型极不相同，其原因就在于他们的模型允许产品价格高到出现供给过剩的程度。

仔细推敲戴维逊和德奈克尔的这篇文章，可以看出，如果把他们的模型中说的“产能(capacity)”改成“产品的产量”，理论上的解释和说明会更清晰有力得多。因此，本文以下将改变戴维逊和德奈克尔的文章中对企业之间博弈的描述，将其变为：在博弈的第一阶段，两个企业各自进行自己的生产，各生产出一定的产量；在第二阶段，这两个企业在给定的产量组合下各自确定最优产品售价。他们的模型中出现的供给过剩，首先产生于博弈第二阶段的价格竞争：在两企业产量之和大到一定程度时，两企业确定的产品价格都会大于使需求正好等于供给的供求平衡价格，这必定会造成产品的需求小于供给的供给过剩。

在多个企业向同一个市场销售同一种产品时，如果这些企业的产品售价相同而在这个价格上产品的需求小于供给，本来任何一个企业都会有单方面降低产品售价的动力：在产品需求小于供给时，每一个企业都会有无法售出的产品，当它单独将自己的产品价格降低一个无穷小时，它在产品售价上的损失接近零，却可以靠价格优势抢走其他企业产品的销路并大大增加自己销售的产品数量。这种单方面降低产品售价的动力会使各个企业争相降低其产品售价，直到所有企业的产品售价都降低到那个使需求正好等于产品供给的价格上。这正是西方主流微观经济理论惯于向我们讲述的价格使需求等于供给的理由。

但是这样强调供大于求时企业单方面降低产品售价的动力，忽视了一个非常重要的情况：当各企业供给的产品总量大到一定程度时，在供求相等的价格上每个企业也都可能有单方面提高产品售价的动力。所有的企业都争相将其产品售价提高到大于供求相等的价格，就会造成产品需求小于供给。

而这里说的各企业供给的产品总量之“大”，当然是相对于产品的市场需求来说的。这就使我们不能不谈到戴维逊和德奈克尔所使用的产品市场需求函数。

戴维逊和德奈克尔文章中的产品市场需求是其价格 p 的函数 $D(p)$。这个产品市场需求函数具有如下性质：$D(p)$ 对 p 可微并严格递减；存在一个 $p_0>0$，如果 $p \geq p_0$ 则 $D(p)=0$，而如果 $p<p_0$ 则 $D(p)>0$，$D(0)<\infty$；整个市场的总收益函数 $p \cdot D(p)$ 是单峰的，在 p^m 上取得唯一的最大值；对 $p<p^m$，$p \cdot D(p)$ 是严格凹的[2]。

戴维逊和德奈克尔的文章定义整个市场的总收益函数 $p \cdot D(p)$ 是单峰的，但只对 $p<p^m$ 是严格凹

的，他们在定义的性质上搞这种差别没有什么站得住的理由。从该文的论述看，他们这样定义可能是为了方便以后的某些论证。而在本文的以下部分中，我们只简单地定义，整个市场的总收益函数在 p 的整个定义域上都是严格凹的。

可以将 $p \cdot D(p)$ 记为产品的名义市场需求 MD，$\frac{dMD}{dp}=D(p)+p \cdot \frac{dD(p)}{dp}$。$MD=p \cdot D(p)$ 严格凹并在 p^m 上取得唯一的最大值[2]。在这样的市场需求函数下，如果整个市场的供给方只有唯一的一个垄断企业时，企业为使自己的利润最大化，就会将产品的销售价格提高到高于使需求等于供给的价格 p^e。在高于 p^e 的产品价格上需求必定小于给定的产品供给 K，从而导致产品供给过剩。

当然，戴维逊和德奈克尔的文章讨论的是有多个企业向同一个市场销售产品的寡头垄断。前边已经指出，寡头垄断下每一个企业在供给过剩时都有单方面降低产品价格的动力，造成产品价格有降到使供求相等水平的趋势。而要使各企业都想将产品价格提高到使供求相等的价格之上，就必须有一个相反的利益驱动，它会使每一个企业都有单方面提高产品价格的动力。

在同一种产品的销售市场上，任何企业索要的产品价格如果高于其他企业，那必定是因为，索要高价的企业相信在这样的高价下对自已的产品仍然会有需求。但是，当某些企业的产品价格高于其他的企业产品价格时，需求方会首先购买价格低的企业的产品，只有在价格低的企业的产品卖光时才不得不转而购买价格高的产品。这样，索价高的企业满足的只能是“剩余的需求”，即索价低的企业的产品满足了的那部分需求之外没有得到满足的需求。

假设有两个企业，企业 i 为其产品索要的价格为 p_i，企业 j 为其产品索要的价格为 p_j，$p_i>p_j$。企业 i 提供到市场上出售的产品数量为 K_i，企业 j 提供到市场上出售的产品数量为 K_j。以 $D(p)$ 记价格 p 上的产品市场需求，$D(p_i|p_j)$ 记在企业 j 索价为 p_j、企业 i 索价为 p_i 的情况下对企业 i 产品的剩余需求。显然，只有在 $D(p_j)>K_j$ 的情况下，$D(p_i|p_j)$ 才可能大于零。

克莱普斯（David M. Kreps）和施恩克曼（José A. Scheinkman）在他们 1983 年发表的一篇文章中断定，这种情况下对企业 i 产品的剩余需求为 $D(p_i|p_j)=D(p_i)-K_j$。正是依据这样的剩余需求函数他们推导出结论：在第二阶段的价格竞争中，任何企业都不会有愿望将自己的索价抬到高于使供求相等的价格，因而两个寡头垄断企业两阶段博弈的结果就是古诺均衡，不可能出现产品需求小于供给的供给过剩[3]。

而戴维逊和德奈克尔的文章使用的是另一种剩余需求函数。他们使用的剩余需求函数是 $D(p_i|p_j)=D(p_i)\cdot\left[1-\left(\frac{K_j}{D(p_j)}\right)\right](for\ all\ p_i>p_j)$。他们正是依据这样的剩余需求函数说明了为什么在许多情况下产品的卖价会高于使需求等于供给的价格[2]。

在此情况下，整个市场上的全部产品供给为 K_i+K_j。以 $P(K_i+K_j)$ 记使市场需求恰好等于 K_i+K_j 的产品价格，企业 i 销售其产品的总收益就是

$$TR_i=p_i \cdot D(p_i)\cdot\left[1-\left(\frac{K_j}{D(p_j)}\right)\right]$$

上述总收益函数对 p_i 的一阶导数为

$$\frac{dTR_i}{dp_i}=\left[D(p_i)+p_i \cdot \frac{dD(p_i)}{(dp_i)}\right]\cdot\left[1-\left(\frac{K_j}{D(p_j)}\right)\right] \qquad (1)$$

根据市场需求函数的性质，在所有小于 p^m 的 p 上都有 $D(p)+p \cdot \frac{dD(p)}{dp}$ 大于零。这样，如果 K_i+K_j 大于 $D(p^m)$ 从而 $P(K_i+K_j)$ 小于 p^m，则当企业 i 将其索价从 $P(K_i+K_j)$ 上单方面提高到任何小于 p^m 的

价格时,都会有式(1)大于零。这意味着只要整个市场上的全部产品供给大于 $D(p^m)$ 且至少有一个企业的供给小于 $D(0)$,企业就会有从 $P(K_i+K_j)$ 上单方面提高其索价的动力;而各个企业都将其索价抬到高于 $P(K_i+K_j)$,就一定会造成供给过剩。

三、供不应求时的配给规则

戴维逊和德奈克尔之所以会得出这样的结论,显然是因为他们的剩余需求函数不同于克莱普斯和施恩克曼的剩余需求函数。戴维逊和德奈克尔对此作了详细的论述,说明剩余需求函数的这个差别来自"配给规则"(rationing rule)的差别[2]。

所谓"配给规则",是产品的需求大于供给时在购买者中分配产品的规则。索价低的企业的产品如何在购买者中间分配,会决定性地影响对索价高的企业的产品的剩余需求。当企业 j 的索价为 $P(K_i+K_j)$ 而企业 i 的索价高于 $P(K_i+K_j)$ 时,要按价格 $P(K_i+K_j)$ 购买企业 j 产品的需求量为 K_i+K_j,而企业 j 按价格 $P(K_i+K_j)$ 提供购买的产品量只有 K_j,因此,不是所有要按价格 $P(K_i+K_j)$ 购买的需求都能得到满足。哪些要按价格 $P(K_i+K_j)$ 购买的需求能够得到满足,这就取决于所谓的"配给规则"。

索价低的企业的产品供不应求时的"配给规则"之所以会影响对索价高的企业产品的剩余需求,是因为在任何价格上的市场需求都由两部分构成:一部分是在更高的价格上也会有的需求,另一部分则是因为价格降低了才产生的需求。因为有后一部分需求,低价格上的产品需求才大于高价格上的产品需求。但是像克莱普斯和施恩克曼(Kreps and Scheinkman)给索价高的企业规定的那种剩余需求函数 $D(p_i|p_j)=D(p_i)-K_j$,意味着这样一种"配给规则":按低价 p_j 卖出的数量为 K_j 的那部分产品,满足的全是在高价 p_i 上也会有的需求,而没有满足任何由于价格降低到 p_i 以下而增加的需求。这样的"配给规则"并不合乎人们在市场上抢购低价产品时的通常情况。而戴维逊和德奈克尔的剩余需求函数则意味着这样一种"配给规则":按低价 p_j 卖出的数量为 K_j 的那部分产品中,有一部分满足的是在更高的价格上才会有的需求,但也有一部分满足的是由于价格降低到 p_j 而增加出来的需求。这样的"配给规则"更合乎竞争性市场中的现实情况。

梯若尔(Jean Tirole)在其所著的《产业组织理论》一书中,将克莱普斯和施恩克曼提出的剩余需求函数 $D(p_i|p_j)=D(p_i)-K_j$ 称作"有效配给规则",而将戴维逊和德奈克尔提出的剩余需求函数 $D(p_i)\cdot\left[1-\left(\frac{K_j}{D(p_j)}\right)\right]$ 称作"按比例配给规则"[4]。

四、双头垄断下的价格博弈均衡

戴维逊和德奈克尔正是根据他们提出的那种更合乎实际的"按比例配给规则",推导出了双头垄断的两个企业在给定的产能(产量)组合下进行价格博弈的均衡结局。

仍然遵守前述市场需求函数,记企业 1 的产能为 K_1,企业 2 的产能为 K_2,企业有"大小"之分:$0<K_1\leq K_2$。每个企业都要将自己的预期利润最大化。在这样的价格博弈中,由于产能(其实是产量)已经给定不能改变,企业要最大化的预期利润其实是预期的总收益。

戴维逊和德奈克尔据此推导出下述"定理"和"引理"[2]。

定理 2[2]:对于 $0<K_1\leq K_2$ 的每一对(K_1,K_2),存在价格上的一个唯一的纳什均衡。如果 $K_1\geq D(0)$,则均衡是纯战略的,在其中每一个企业都索要一个零价格并赚得零利润。如果 $P(K_1+K_2)\geq p^m$,均

衡也是纯战略的，在其中每一个企业都索要 $P(K_1+K_2)$ 并赚得利润 $K_i \cdot P(K_1+K_2)$。在其他情况下，均衡是非退化的混合战略均衡。此外，均衡利润对 K_1 和 K_1 连续。如果 $K_1+K_2 \geq D(0)$，此定理中定义 $P(K_1+K_2)$ 等于零。

引理1[2]：在任何纯战略均衡下 $p_1=p_2=P(K_1+K_2)$。再者，当且仅当 $K_1, K_2 \geq D(0)$ 或 $P(K_1+K_2) \geq p^m$ 时存在纯战略均衡。

对于价格博弈中的混合战略均衡，戴维逊和德奈克尔以 $\varphi_i(p)$ 表企业 i 的均衡价格分布，$\underline{p}$ 表 $\varphi_i(p)$ 的支撑中的最低价格。他们说的厂商的"利润"(其实是预期的总收益)如下。

$$\pi_i = \underline{p}min(D(\underline{p}), K_i)$$

"引理2"说明了两企业价格博弈中的混合战略均衡[2]。

引理2[2]：假设 $K_1<D(0)$，(K_1,K_2) 满足 $P(K_1+K_2)<p^m$。那么就对下述的微分方程(2)存在着一对唯一解(φ_1,φ_2)，该微分方程为：

$$-\varphi'_j(p)Z_3(p)+((1-\varphi_j(p))Z_i(p)=-\pi_i Z_4(p), \quad i,j=1,2 \tag{2}$$

有边界条件 $\varphi_1(p^m)=1$，$\varphi_2(\underline{p})=0$，它们满足条件 $\varphi_1(\underline{p})=0$，以及

$$Z_i(p)=\frac{d}{dp}min[K_i/D(p), 1] \qquad i=1,2$$

$$Z_3(p)=min\left[(1, \frac{K_i}{D(p)}, \frac{K_j}{D(p)}, \frac{(K_i+K_j-D(p)}{D(p)}\right]$$

$$Z_4(p)=\frac{D(p)+pD'(p)}{[pD(p)]^2}$$

$$\pi_i=\underline{p}min((D(\underline{p}), K_i))$$

再者，分布对$(\varphi_1 \varphi_2)$也是由(K_i,K_j)出发的子博弈的解。

上述的引理2意味着，在 $K_1+K_2>D(p^m)$、$K_1<D(0)$ 的情况下，两企业间价格博弈的均衡是混合战略均衡。正是这样的混合战略均衡中的高索价造成了供给过剩。每个企业都有单方面将其产品价格提高到 p^m 的动力。但是如果两企业的索价都为 p^m，产品市场上的需求就必定小于供给，每个企业的产品销售量都会明显小于它自己的供给。在这种情况下，任何厂商单方面将自己的索价降低一个无穷小，就可以从另一个企业那里夺得全部产品需求从而大大增加自己的产品销售量，而自己在产品售价上的损失却是一个无穷小量。在这种情况下，任何一个企业都会有单方面降低自己索价的动力。与此相类似，在两企业索要的产品价格会造成供给过剩的情况下，任何一个企业都会有单方面降低自己索价的动力。而当两企业索要的同一个产品价格降低到使供求相等的价格时，每一个企业又都想单方面提高产品价格。这样的价格博弈的均衡，就只能是两企业在索价上采取混合战略。

在 $K_1+K_2>D(p^m)$、$K_1<D(0)$ 的情况下两企业间的价格博弈之所以会造成混合战略均衡，是因为在这种情况下，任何企业在另一个企业肯定索要某一产品价格时都会单方面改变自己的索价。

这样的混合战略均衡会导致高索价造成的供给过剩，是因为在这种情况下的均衡混合战略中可能索要的任何价格都高于使需求等于供给的价格 $P(K_i+K_j)$。按照戴维逊和德奈克尔提出的"按比例配给规则"，当企业 i 的索价 p_i 高于企业 j 的索价 p_j 时，对企业 i 产品的剩余需求为 $D(p_i|p_j)=D(p_i) \cdot \left[1-\left(\frac{K_j}{D(p_j)}\right)\right]$。如果 p_i 和 p_j 都等于 $P(K_i+K_j)$，则上述剩余需求 $D(p_i|p_j)=D(P(K_i+K_j)) \cdot \left[1-\left(\frac{K_j}{D(P(K_i+K_j))}\right)\right]=K_i+K_j-K_j=K_i$。如果 p_j 仍然等于 $P(K_i+K_j)$ 而 p_i 上升到高于 $P(K_i+K_j)$，则

由于在这样高的 p_i 上 $D(p_i)$ 小于 K_i+K_j，对企业 i 产品的剩余需求 $D(p_i|p_j)=D(p_i)\cdot\left[1-\left(\frac{K_j}{D(p_j)}\right)\right]$ 就会小于 K_i；如果在这样高的 p_i 上 p_j 也上升到高于 $P(K_i+K_j)$ 但仍低于 p_i 的水平，则由于这样高的 p_j 上 $D(p_j)$ 小于 K_i+K_j，$1-\left(\frac{K_j}{D(p_j)}\right)$ 会变得小于 $1-\left(\frac{K_j}{D(P(K_i+K_j))}\right)$，对企业 i 产品的剩余需求 $D(p_i|p_j)=D(p_i)\cdot\left[1-\left(\frac{K_j}{D(p_j)}\right)\right]$ 就会更进一步地小于 K_i。这样，在两企业可能索要的任何价格都高于 $P(K_i+K_j)$ 的情况下，索价高造成的供给过剩就不可避免。

可惜的是，戴维逊和德奈克尔的文章中并没有明确阐明，他们的那种价格博弈下的混合战略均衡必定会导致索价高造成的供给过剩。他们的文章中对许多重要问题没有展开分析和论述，由此产生了一些论证上的漏洞，有些表述甚至是错误的。这直接妨碍了读者对索价高导致供给过剩问题的认识。基于此，本文不得不对其文章作尽可能简练的补充和修正，主要是为了说明怎样会产生索价高导致的供给过剩。

五、价格博弈混合战略均衡下的供给过剩

在戴维逊和德奈克尔的模型中，高索价造成的供给过剩出现在价格博弈的混合战略均衡中。因此，存在价格博弈的混合战略均衡，这是高索价造成的供给过剩出现的前提。而戴维逊和德奈克尔对价格博弈的混合战略均衡存在性的论证，就是混合战略的价格分布函数存在，即公式(2)中的 φ_i 是合适的分布函数。

戴维逊和德奈克尔文章的附录中论证了，在对 π_2 的任何正的选择下，φ_1 是一个合适的分布函数。这个论证也一般地适用于论证这一命题：在对 π_i 的任何正的选择下，φ_j 是一个合适的分布函数。这一论证如下所述：$Z_i(p)\geq 0$ for $i=1$，2、Z_3 和 Z_4 在区间 $(P(K_1+K_2),p^m)$ 上为正。基于此，审视一下式(2)就会发现，由于 $-\pi_i Z_4(p)$ 小于零，$(1-\varphi_j(p))Z_i(p)$ 不小于零，如果 $\varphi'_j(p)$ 不大于零，等式(2)就不可能成立。这样，$\varphi'_j(p)$ 在区间 $(P(K_1+K_2),p^m))$ 上就是严格为正的，唯一例外之处是在 $P(K_i)$ 上，在那里它没有定义。当 $p\to P(K_1+K_2)$ 时，$\varphi'_j(p)\to\infty$。因此，无论 π_i 的初始选择是什么，$\underline{p}>P(K_1+K_2)$ 都有良好的定义，并且满足对分布函数的所有要求。

既然这样一个均衡混合战略的概率分布函数存在，应当说价格博弈中的混合战略均衡就是存在的。而在这样的双头价格博弈混合战略均衡下，两个企业可能索要的任何价格都高于 $P(K_1+K_2)$，这集中表现在每个企业混合战略支撑集的下界 $\underline{p}$ 都高于 $P(K_1+K_2)$。$\underline{p}$ 都高于 $P(K_1+K_2)$，意味着在任何企业的混合战略所包含的可能索要的价格中，最低的价格也高于使需求等于供给的价格。

可以从两个不同的角度证明 $\underline{p}$ 高于 $P(K_1+K_2)$。

第一个角度是对企业预期总收益的比较。企业在价格博弈中使用均衡混合战略而不是简单地索要使需求等于供给的价格 $P(K_1+K_2)$，当然是因为使用均衡混合战略比接受供求相等的价格有更高的预期总收益。

第二个角度是使用均衡混合战略概率分布必须满足的等式(2)。由于 $P(K_1+K_2)<p^m$，当价格 p 尚未降低到 $P(K_1+K_2)$ 但只比 $P(K_1+K_2)$ 大一个无穷小时，$\varphi'_j(p)$ 就必须趋于无穷大。这都不合乎合适的概率分布函数的要求。这就决定了 $\underline{p}$ 不可能降低到等于 $P(K_1+K_2)$，而必定是高于 $P(K_1+K_2)$ 的。

在戴维逊和德奈克尔所说的“按比例配给规则”下，由于均衡混合战略中可能索要的最低价格都高于使需求等于供给的产品价格，在 $K_1+K_2>D(p^m)$、$K_1<D(0)$ 的情况下就必定会有高索价导致的供给

过剩。

戴维逊和德奈克尔的这篇文章是供给过剩理论分析的标志性文献，对于从理论上说明供给过剩具有开创性意义，这些漏洞、不足和错误虽然没有直接涉及索价高导致的供给过剩，但是指出这些问题对于系统地理解供给过剩的理论分析不可或缺。

六、均衡混合战略支撑集的上界

我们以$\underline{p}_1$记企业 1 均衡混合战略支撑集的下界，以 $\hat{p}_1$ 记该支撑集的上界，以$\underline{p}_2$记企业 2 均衡混合战略支撑集的下界，以 $\hat{p}_2$ 记该支撑集的上界。p_1 是企业 1 在价格博弈的混合战略均衡下可能索要的最低价格，$\hat{p}_1$ 则是它在这种情况下可能索要的最高价格；$\underline{p}_2$是企业 2 在价格博弈的混合战略均衡下可能索要的最低价格，$\hat{p}_2$ 是它在这种情况下可能索要的最高价格。

在双头价格博弈的混合战略均衡下，$\underline{p}_1$必定等于$\underline{p}_2$；而 $\hat{p}_1$ 和 $\hat{p}_2$ 都不可能高于 p^m。但是在戴维逊和德奈克尔的文章中，并没有清楚地说明和论证 $\hat{p}_2$ 不可能高于 p^m，也没有论证为何$\underline{p}_1$会等于$\underline{p}_2$。

戴维逊和德奈克尔的文章只是明确说到 $\varphi_1(p^m)=1$，这等于说 $\hat{p}_1$ 不可能高于 p^m。此外，戴维逊和德奈克尔的文章中还论证了在 $K_1<K_2$ 的情况下 $\varphi_1(p^m)=1$，并说这意味着企业 2 总是在其支撑集的上界有一个断点[2]。这似乎意味着 $\hat{p}_2$ 也不会高于 p^m，但是戴维逊和德奈克尔的文章并没有明确地说 $\hat{p}_2$ 不会高于 p^m。更大的问题在于，戴维逊和德奈克尔的文章并没有论证，为什么 $\hat{p}_1$ 和 $\hat{p}_2$ 都不可能高于 p^m。

戴维逊和德奈克尔文章中的公式(A2)，实际上表明的也是在两个企业都在价格博弈中采用混合战略的情况下，企业 i 在其索价为 p 时的预期总收益[2]。该公式为

$$\pi_i = pD(p)\int_{\underline{p}}^{p} max\left\{0,1-\frac{K_j}{D(Z)}\right\}d\varphi_j(Z) + p\ min\{D(p),K_i\}(1-\varphi_j(p)) \tag{3}$$

如果 $\hat{p}_i$ 不小于 $\hat{p}_j$，则企业 i 在其索价为 $\hat{p}_i$ 时的预期总收益就变为

$$ETR_i(\hat{p}_i) = \hat{p}_i D(\hat{p}_i)\int_{\underline{p}}^{\hat{p}_i} max\left\{0,1-\frac{K_j}{(D(Z))}\right\}d\varphi_j(Z)$$

将上述的 $ETR_i(\hat{p}_i)$ 对 p_i 求一阶导数，有

$$\frac{\partial ETR_i(\hat{p}_i)}{\partial p_i} = \left[D(\hat{p}_i)+\hat{p}_i\cdot\frac{\partial D(\hat{p}_i)}{\partial p_i}\right]\cdot\int_{\underline{p}}^{\hat{p}_i} max\left\{0,1-\frac{K_j}{D(Z)}\right\}d\varphi_j(Z) \tag{4}$$

由于整个市场的总收益函数 $MD=p\cdot D(p)$ 严格凹并在 p^m 上取得唯一的最大值，如果 $\hat{p}_i$ 高于 p^m，就会有 $D(\hat{p}_i)+\hat{p}_i\cdot\frac{\partial D(\hat{p}_i)}{\partial p_i}$小于零，企业 i 会有愿望将自己的最高索价 $\hat{p}_i$ 降到低于 $\hat{p}_j$ 以增大自己的预期总收益。这会导致将 $\hat{p}_i$ 降到低于 $\hat{p}_j$。

当 $\hat{p}_i$ 低于 $\hat{p}_j$ 时，企业 i 在 $\hat{p}_i$ 上的预期总收益会变为

$$\pi_i(\hat{p}_i) = \hat{p}_i\cdot D(\hat{p}_i)\cdot\int_{\underline{p}}^{\hat{p}_i} max\left\{0,1-\frac{K_j}{D(Z)}\right\}d\varphi_j(Z) + \hat{p}_i\cdot min\{(D(\hat{p}_i),K_i)\}(1-\varphi_j(\hat{p}_i)) \tag{5}$$

这个预期总收益函数对 p_i 的一阶导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_i(\hat{p}_i)}{\partial p_i} = & \left[D(\hat{p}_i) + \hat{p}_i \cdot \frac{\partial D(\hat{p}_i)}{\partial \partial p_i}\right] \cdot \int_{\underline{p}}^{\hat{p}_i} max\left\{0, 1 - \frac{K_j}{D(Z)}\right\} d\varphi_j(Z) + \\ & \varphi'_j(\hat{p}_i) \cdot \hat{p}_i \cdot max\{-D(\hat{p}_i), -K_i, -K_j, D(\hat{p}_i) - K_i - K_j\} + \\ & (1 - \varphi_j(\hat{p}_i)) \cdot \left[min\{D(\hat{p}_i), K_i\} + \hat{p}_i \cdot \frac{\partial min\{D(\hat{p}_i), K_i\}}{\partial p_i}\right]\end{aligned}$$

由于 $\hat{p}_i$ 高于 $P(K_1+K_2)$，$D(\hat{p}_i)-K_i-K_j$ 必小于零。因此上式中的 $\varphi'_j(\hat{p}_i)\cdot\hat{p}_i\cdot max\{-D(\hat{p}_i), -K_i, -K_j, D(\hat{p}_i)-K_i-K_j\}$ 一项为负。在 $D(\hat{p}_i)$ 小于 K_i 时，$min\{D(\hat{p}_i), K_i\}+\hat{p}_i\cdot\frac{\partial min\{D(\hat{p}_i), K_i\}}{\partial p_i}$ 等于 $D(\hat{p}_i)+\hat{p}_i\cdot\frac{\partial D(\hat{p}_i)}{\partial\partial p_i}$；而当 $D(\hat{p}_i)$ 大于 K_i 时，$min\{D(\hat{p}_i), K_i\}+\hat{p}_i\cdot\frac{\partial min\{D(\hat{p}_i), K_i\}}{\partial p_i}$ 就等于 K_i。而只要这样的 $\hat{p}_i$ 仍然高于 p^m，$D(\hat{p}_i)+\hat{p}_i\cdot\frac{\partial D(\hat{p}_i)}{\partial\partial p_i}$ 就会小于零。这样，只要 $\hat{p}_i$ 仍然高于 p^m，即使 $\hat{p}_i$ 已经低于 $\hat{p}_j$，也只有在 $\hat{p}_i$ 降低到了使 $D(\hat{p}_i)$ 大于 K_i 的程度，$\frac{\partial\pi_i(\hat{p}_i)}{\partial p_i}$ 才可能等于零。而要使 $\hat{p}_i$ 高于 p^m 的情况下 $D(\hat{p}_i)$ 大于 K_i，就要有 $D(p^m)$ 大于 K_i。这是一个未必能够得到满足的条件。

这就表明，只要 $\hat{p}_i$ 高于 p^m 且不低于 $\hat{p}_j$，企业 i 就不仅想把 $\hat{p}_i$ 降得低于 $\hat{p}_j$，而且还很可能想进一步降低 $\hat{p}_i$。因此，$\hat{p}_i$ 高于 p^m 且不低于 $\hat{p}_j$ 时不会有双头价格博弈的混合战略均衡。

更重要的是，只要 $\hat{p}_j$ 也高于 p^m，则一旦 $\hat{p}_i$ 降到了低于 $\hat{p}_j$ 的程度，企业 j 就也会面临像 $\hat{p}_i$ 不低于 $\hat{p}_j$ 时企业 i 所面临的那样的局势，会想把 $\hat{p}_j$ 再降到低于 $\hat{p}_i$。企业 i 和企业 j 这样竞相降低自己可能报出的最高索价，就会使它们各自可能报出的最高索价都不高于 p^m。这样，双头价格博弈的混合战略均衡下 $\hat{p}_i$ 和 $\hat{p}_j$ 都不会高于 p^m。

七、均衡混合战略支撑集的下界

由于双头价格博弈的混合战略均衡下 $\hat{p}_i$ 和 $\hat{p}_j$ 都不会高于 p^m，均衡混合战略支撑集的下界 $\underline{p_1}$ 和 $\underline{p_2}$ 就必定会低于 p^m。

对于均衡混合战略支撑集的下界，戴维逊和德奈克尔的文章没有区分 $\underline{p_1}$ 和 $\underline{p_2}$，只是笼统地将它们都标为 $\underline{p}$。这当然意味着戴维逊和德奈克尔认为 $\underline{p_1}$ 必定会等于 $\underline{p_2}$。在他们文章中的公式(2)里，还标明了 $\varphi_1(\underline{p})=0$ 和 $\varphi_2(\underline{p})=0$。但是他们并没有说明，为什么 $\underline{p_1}$ 必定会等于 $\underline{p_2}$。鉴于这个问题的重要性，本文在这里做一个简单的论证。

这里只需讨论 $\underline{p_1}$ 和 $\underline{p_2}$ 都小于 p^m 的情况。在这种情况下，如果 $\underline{p_i}$ 小于 $\underline{p_j}$，则当企业 i 报出的价格 p_i 在区间 $[\underline{p_i}, \underline{p_j}]$ 内时，它的报价一定小于 p^m，提高产品报价 p_i 会增加企业 i 预期的总收益 $p_i\cdot min(D(p_i), K_i)$，企业 i 会有将其最低产品索价提高到等于 $\underline{p_j}$ 的动机。这样，$\underline{p_i}$ 小于 $\underline{p_j}$ 不可能是价格博弈的均衡。如果存在着双头价格博弈的混合战略均衡，就一定会有 $\underline{p_i}=\underline{p_j}=\underline{p}$。

前文已经指出，$\underline{p_i}=\underline{p_j}=\underline{p}$ 大于 $P(K_1+K_2)$ 且小于 p^m。还可以进一步限定 $\underline{p}$ 的取值范围。

以 $P(K_i)$ 表示使市场需求正好等于 K_i 的产品价格。由于 $K_1\le K_2$，所以 $P(K_2)\le P(K_1)$。戴维逊和德奈克尔的论文中只是论证说：如果存在着这样一个 $\hat{p}$，对某个 $\hat{p}\le p^m$ 有 $\varphi_2(\hat{p})=1$，那么 $\underline{p}<P(K_2)$[2]414。

由于该文中再没有其它地方谈到 $\underline{p}$ 与 $P(K_2)$ 的关系，这段论证就给人留下一个错误的印象，似乎 $\underline{p}$ 不可能高于 $P(K_2)$。

实际上，戴维逊和德奈克尔的上述论证本身就有错误。$\underline{p}$ 确实不可能高于 $P(K_1)$，但是却完全可能低于 $P(K_1)$ 而高于 $P(K_2)$。而对于这些，戴维逊和德奈克尔的文章根本就没有提到。

以下是对 $\underline{p}$ 不可能高于 $P(K_1)$ 的论证：

如果 $\underline{p}$ 不低于 $P(K_1)$，则在大于 $\underline{p}$ 的任何 p 上都会有 $D(p) < K_1$ 和 $D(p) < K_2$，$\frac{K_1}{D(p)} > 1$ 且 $\frac{K_2}{D(p)} > 1$。于是在不小于 $\underline{p}$ 的任何上 p 都有 $max\left\{0, 1 - \frac{K_j}{D(p)}\right\} = 0$。根据式（3），这种情况下在不小于 $\underline{p}$ 的任何上 p 都有

$$\pi_1 = p \cdot D(p) \cdot (1 - \varphi_2(p))$$
$$\pi_2 = p \cdot D(p) \cdot (1 - \varphi_1(p))$$

因为在企业 i 可能报出的最高价格 $\hat{p}_i$ 上 $\varphi_i(\hat{p}_i) = 1$，若 $\hat{p}_i > \hat{p}_j$，则大于或等于 $\hat{p}_j$ 而不高于 $\hat{p}_i$ 的 p 上 $\pi_i = 0$，而在小于 $\hat{p}_j$ 的 p 上 π_i 却大于零；若 $\hat{p}_i = \hat{p}_j = \hat{p}$，则在 $\hat{p}$ 上 π_i 和 π_j 都等于零，而在小于 $\hat{p}_j$ 的 p 上 π_i 和 π_j 却都大于零。这显然不会是价格博弈中的混合战略均衡。这种情况下两个企业都会争相将自己可能的最高报价降得低于另一企业可能的最高报价，并且最终将 $\underline{p}$ 降到低于 $P(K_1)$。

但是，如果 $K_1 < K_2$ 从而 $P(K_2) < P(K_1)$，在双头价格博弈中的混合战略均衡下就可能会有 $\underline{p}$ 高于 $P(K_2)$ 但低于 $P(K_1)$ 的情况，这种情况下企业混合战略支撑集的上界会形成一个断点。这个原理特别适用于 $K_2 > D(0)$ 的情况下。此时大于 $\underline{p}$ 的任何 p 上都会有 $D(p) < K_2$，$\frac{K_2}{D(p)} > 1$，从而必定有 $max\left\{0, 1 - \frac{K_2}{D(p)}\right\} = 0$。这样，根据式（3），在不小于 $\underline{p}$ 的任何 p 上都有

$$\pi_1 = p \cdot min\{D(p), K_1\} \cdot (1 - \varphi_2(p)) \tag{6}$$

企业 1 有让自己预期总收益最大化的动力，这就导致了 $\frac{d\pi_1}{dp} = 0$，根据这个条件可以解出

$$\varphi_2(p) = 1 - \frac{\underline{p}}{p} \tag{7}$$

可以看出，φ_2 总是小于 1 的，而企业 2 的报价上界是有限的，所以在 $\hat{p}_2$ 处，φ_2 会跳跃至 1。

由于 $\varphi_2(\hat{p}_2) = 1$，在 $\hat{p}_2$ 上 π_1 等于零。这样的 π_1 肯定小于 $\varphi_2(p) = 0$ 的 $\underline{p}$ 处的 π_1。这样就不可能有价格博弈的混合战略均衡。因此，在价格博弈的混合战略均衡下，企业 1 会将其可能的最高报价 $\hat{p}_1$ 降得低于 $\hat{p}_2$，使 $\varphi_2(\hat{p}_1)$ 小于 1，以保证 $\hat{p}_1$ 处的 π_1 等于 $\underline{p}$ 处的 $\pi_1 = \underline{p} \cdot min\{D(\underline{p}), K_1\}$。这就造成了 $\varphi_2(\hat{p}_1) < \varphi_1(\hat{p}_1) = 1$。

在这样的价格博弈的混合战略均衡下，企业 2 可能的最高报价 $\hat{p}_2$ 高于 $\hat{p}_1$，那么在高于 $\hat{p}_1$ 且低于 $\hat{p}_2$ 的情况下，企业 2 的预期总收益是

$$\pi_2 = \hat{p}_2 D(\hat{p}_2) \int_{\underline{p}}^{min\{\hat{p}1, P(K1)\}} max\left\{0, 1 - \frac{K_1}{D(Z)}\right\} d\varphi_1(Z) \tag{8}$$

显然，企业 2 会将 $\hat{p}_2$ 设定在 p^m 上以最大化其预期总收益，但是前面（7）式已经指出，企业 2 的策略在 $\hat{p}_2$ 以外都是连续的，因此 $\hat{p}_1$ 只能比 $\hat{p}_2$ 小一个无穷小。然而，企业 1 的策略同样可以根据 $\frac{d\pi_2}{dp} = 0$ 解

出，这就说明 $\hat{p}_1$ 是由 φ_1 决定的，不可能任意接近 $\hat{p}_2$。此处似乎导出了一个矛盾。

不过，只要企业 2 报价高于 $max\{\hat{p}_1, P(K_1)\}$，公式(8)就能成立，所以只要企业 1 的产量 $K_1 = D(p^m)$，且解出的 $\hat{p}_1$ 小于 $P(K_1)$，那么价格博弈就存在混合战略均衡，而这个条件是很有可能得到满足的。

其实，这种 $K_1 < K_2$ 时 $\varphi_2(\hat{p}_1) < \varphi_1(\hat{p}_1) = 1$ 的情况，正是戴维逊和德奈克尔文章的数学附录中极力要证明的[2]。奇怪的是，他们却在那里根本就否认可能会有 $\underline{p} \geqslant P(K_2)$。

其实，在某些会出现价格博弈混合战略均衡的情况下，$\underline{p}$ 不可能不大于 $P(K_2)$。戴维逊和德奈克尔文章中提到的会出现价格博弈混合战略均衡的一个情况是，$K_1 + K_2 > D(p^m)$，$K_1 < D(0)$ 但 $K_2 > D(0)$。在这种情况下，$P(K_2)$ 只能定义为零，而大于零的 $\underline{p}$ 不能不大于 $P(K_2)$。这种 $K_2 > D(0)$ 的情况正是 $\underline{p}$ 高于 $P(K_2)$ 的混合战略均衡的典型例子。

事实上，戴维逊和德奈克尔文章中否定可能会有 $\underline{p} \geqslant P(K_2)$ 的论证是不能成立的。他们论证的理由就是使用前边的公式(6)，说根据这个公式在 $\hat{p}_2$ 上的 π_1 会不等于 $\underline{p}$ 处的 π_1。而正如我们前边指出的，这种情况下企业 1 根本就不会索要价格 $\hat{p}_2$，它可能索要的最高价格 $\hat{p}_1$ 低于 $\hat{p}_2$。就是按照戴维逊和德奈克尔文章自己的规定，这也是可能的：他们的文章中规定了 $\varphi_1(p^m) = 1$；在这个前提下，如果对某个 $\hat{p} \leq p^m$ 有 $\varphi_2(\hat{p}) = 1$，那么 $\underline{p} < P(K_2)$[2]。这个论证之所以不成立，是因为可以设定 $\hat{p} = p^m$，再设定一个小于 $\hat{p}$ 的 $\hat{p}_1$，令 $\varphi_1(\hat{p}_1) = 1$，而这并不妨碍在高于 $\hat{p}_1$ 的 p^m 上 $\varphi_1(p^m) = 1$！那样就会像我们论证的，在 $\underline{p} \geqslant P(K_2)$ 的情况下也有价格博弈的混合战略均衡。

八、混合战略均衡的唯一性和厂商的预期总收益

在戴维逊和德奈克尔的模型中，混合战略均衡的唯一性与企业的预期总收益紧密地联系在一起。这是因为，按照戴维逊和德奈克尔文章中论证均衡唯一性的思路，只有以给定的产量对(K_1, K_2))下每个企业的预期总收益 π_i 具有惟一性为前提，才能证明混合战略均衡的唯一性。

戴维逊和德奈克尔的文章将那一对混合战略分布函数(φ_1, φ_2))的唯一性就看作价格博弈混合战略均衡的唯一性。这篇文章把有关唯一性的全部讨论都集中在那一对(φ_1, φ_2))是否是微分方程(2)的唯一解上，而把对(φ_1, φ_2))是否是唯一解的讨论又集中在是否最多只有一个 $\underline{p}$ 能够使等式 $\pi_2 = \underline{p} \cdot min\{D(\underline{p}), K_2\}$ 成立。为此该文设计了一个令人莫名其妙的函数 $f_1(p)$ 并界定 $f_1(p^m) = 0$，利用它设计了一个等式 $p \cdot min\{D(p), K_2\} \cdot f_1(p) = 1$，说该等式的左边的导数对所有的 p 都为负，把这个就算作对唯一性的论证[2]。

但从字面上看，对唯一性的这一论证根本就不成立。原因是，在对函数 $f_1(p)$ 性质的任何说得通的假设下将 $p \cdot min\{D(p), K_2\} \cdot f_1(p)$ 对 p 求导，根本就得不出该导数一定为负的结论。在 p 小于 p^m 的情况下，该导数倒更可能是大于零的。这样，戴维逊和德奈克尔文章对 $\underline{p}$ 唯一性的证明不仅笨拙，而且不能成立。

事实上，确实可以将双头价格博弈混合战略均衡的唯一性问题，视为在给定的产量对(K_1, K_2)下是否只有一对(φ_1, φ_2)作为微分方程(2)的唯一解的问题。在给定的从而是唯一的 π_2 和 $\underline{p}$ 下，微分方程(2)的解确实唯一；而我们这里将证明，在给定的产量对(K_1, K_2)下，π_2 从而 $\underline{p}$ 在价格博弈的混合战略均衡下对微分方程(2)确实唯一。

微分方程(2)可化为

$$\phi'_i = \frac{Z_j}{Z_3}(1-\phi_i) + \frac{Z_4}{Z_3}\pi_j \tag{9}$$

而且对于给定但未知的$\underline{p}$，我们有初值条件$\phi_i(\underline{p})=0$。

方程(9)中的π_j在任何p上都给定不变，从而是一个给定的数值。在这样给定从而唯一的π_j下，由于$Z_1(p)$、$Z_2(p)$、$Z_3(p)$、$Z_4(p)$都是Lipschitz连续的，因此积分号内的函数也是Lipschitz连续的，这就保证了方程(9)解的存在性和唯一性。

方程(9)解的这种唯一性以$\underline{p}$给定从而唯一为前提，每一个$\underline{p}$都对应一个唯一的解φ_i，不同的$\underline{p}$可能对应着方程(9)的不同解。因此，只有证明了$\underline{p}$的唯一性，才能真正证明给定的产量对(K_1,K_2))下微分方程(2)解的唯一性。也正因为如此，戴维逊和德奈克尔的文章才把对均衡唯一性的讨论集中在$\underline{p}$是否唯一上。

与此密不可分的是，微分方程(2)中的π_i是给定的，不同的π_i也可能导致微分方程(2)有不同的解。这也意味着，也只有证明了π_i的唯一性，才能真正证明给定的产量对(K_1,K_2)下微分方程(2)解的唯一性。实际上，π_i与$\underline{p}$直接相联，知道了其中的一个，就马上可以推出另一个。

前边已经说明，混合战略均衡下$p^m>\underline{p}>P(K_i+K_j)$，因此混合战略均衡下$\pi_i$可能取值的范围为$p^m\cdot K_i>\pi_i>K_i\cdot P(K_i+K_j)$。在$\pi_i$可能取值的这一范围内，对任何一个数值的$\pi_i$，最多只有一个$p$能够使等式$\pi_i=p\cdot min(D(p),K_i)$成立，这个$p$就是与那个$\pi_i$相对应的$\underline{p}$。

之所以如此，是因为在$p^m>p>P(K_i+K_j)$的情况下，$p\cdot min(D(p),K_i)$对p的一阶导数必定会大于零：在$D(p)$大于K_i的p上，$p\cdot min(D(p),K_i)$对p的一阶导数等于K_i；而在$D(p)$小于K_i的p上，$p\cdot min(D(p),K_i)$对p的一阶导数等于$D(p)+p\cdot\frac{dD(p)}{dp}$，它在小于$p^m$的$p$上必定大于零。

这样，只要能够证明给定的产量对(K_1,K_2)下π_2的唯一性，就可以证明给定的产量对(K_1,K_2)下$\underline{p}$的唯一性，由此又可以证明给定的产量对(K_1,K_2)下π_1的唯一性，据此证明给定的产量对(K_1,K_2)下微分方程(2)解的唯一性。

以下是对给定的产量对(K_1,K_2)下π_2的唯一性的论证：

以$\hat{\pi}_2$记企业2在其混合战略支撑集上界价格$\hat{p}_2$上的预期总收益，$\underline{\pi_2}$记企业2在其混合战略支撑集下界价格$\underline{p}$上的预期总收益，它们都是$\underline{p}$的函数：

$$\underline{\pi_2}(\underline{p}) = \underline{p}min(D(\underline{p}),K_2)$$

$$\hat{\pi}_2(\underline{p}) = \hat{p}_2\cdot D(\hat{p}_2)\cdot\int_{\underline{p}}^{\hat{p}2} max\left\{0,1-\frac{K_1}{D(Z)}\right\}d\varphi_1(Z)$$

本文前边已经论证了，$\hat{p}_2$不可能大于p^m。那个论证其实也暗示了，$\hat{p}_2$就等于p^m。因此，

$$\pi_2(\hat{p}_2) = p^m\cdot D(p^m)\cdot\int_{\underline{p}}^{pm} max\cdot\left\{0,1-\frac{K_1}{D(Z)}\right\}d\varphi_1(Z)$$

$\hat{\pi}_2$减$\underline{\pi_2}$之差为

$$H(\underline{p}) = \hat{\pi}_2(\underline{p}) - \underline{\pi_2}(\underline{p})$$

$$\frac{\partial H(\underline{p})}{\partial\underline{p}} = \frac{\partial\hat{\pi}_2(\underline{p})}{\partial\underline{p}} - \frac{\partial\underline{\pi_2}(\underline{p})}{\partial\underline{p}}$$

以下将以简单的数学分析证明，在$\underline{p}$小于p^m的情况下，恒有

$$\frac{\partial H(\underline{p})}{\partial\underline{p}} < 0 \tag{10}$$

首先，在 $p^m > \underline{p} > P(K_i + K_j)$ 的情况下必定有 $\frac{\partial \pi_2(\underline{p})}{\partial \underline{p}} > 0$：在 $D(\underline{p})$ 大于 K_2 的 $\underline{p}$ 上，$\underline{\pi}_2(\underline{p}) = \underline{p}min(D(\underline{p}), K_2)$ 对 $\underline{p}$ 的一阶导数等于 K_2，它大于零；而在 $D(\underline{p})$ 小于 K_2 的 $\underline{p}$ 上，$\underline{\pi}_2(\underline{p}) = \underline{p}min(D(\underline{p}), K_2))$ 对 $\underline{p}$ 的一阶导数等于 $D(\underline{p}) + \underline{p} \cdot \frac{dD(\underline{p})}{d\underline{p}}$，它在小于 p^m 的 $\underline{p}$ 上必定大于零。

其次，$\frac{\partial \hat{\pi}_2(\underline{p})}{\partial \underline{p}} < 0$。

前边已经指出，$\pi_2(\hat{p}_2) = p^m \cdot D(p^m) \cdot \int_{\underline{p}}^{pm} max\left\{0, 1 - \frac{K_1}{D(Z)}\right\} d\varphi_1(Z)$。将 $\underline{p}$ 提高一个无穷小，将使上式中原积分下界的 $\underline{p}$ 处大于零的 $d\varphi_1(\underline{p})$ 降低为零，从而使 $\underline{p}$ 上减少了微分级的概率 $d\varphi_1(\underline{p})$。由此减少了企业 2 在 $\underline{p}$ 处的预期总收益 $p^m \cdot D(p^m) \cdot \left[1 - \frac{K_1}{D(\underline{p})}\right]$。但是，无论在 $\underline{p}$ 提高前还是提高后，都有 $\int_{\underline{p}}^{pm} d\varphi_1(Z) = 1$，因此在原来的 $\underline{p}$ 处减少了微分级的概率 $d\varphi_1(\underline{p})$，就意味着必定会在大于 $\underline{p}$ 的某个 p 或某些 p 上增加了等量的微分级的概率 $d\varphi_1(\underline{p})$。而在这些微分级的概率增加的 p 上，企业 2 的预期总收益为 $p^m \cdot D(p^m) \cdot max\left\{0, 1 - \frac{K_1}{D(p)}\right\}$，由于这些 p 都必定大于 $\underline{p}$，$max\left\{0, 1 - \frac{K_1}{D(p)}\right\}$ 必定小于 $1 - \frac{K_1}{D(\underline{p})}$，因此微分级的概率增加处增加的预期总收益必定会小于微分级的概率减少处减少的预期总收益，导致 $\underline{p}$ 的提高减少企业 2 的预期总收益，使 $\frac{\partial \hat{\pi}_2(\underline{p})}{\partial \underline{p}} < 0$。

将这一分析形式化，可以假定 $\underline{p}$ 提高减去了 p 处的 $d\varphi_1(\underline{p})$，同时在某一大于 $\underline{p}$ 的 p 上将其微分级的概率增加了同样大的 $d\varphi_1(\underline{p})$。于是有

$$\frac{\partial \hat{\pi}_2(\underline{p})}{\partial \underline{p}} = p^m \cdot D(p^m) \cdot \varphi'_1(\underline{p}) \cdot max\left\{-\left[1 - \frac{K_1}{D(\underline{p})}\right], \frac{K_1}{D(\underline{p})} - \frac{K_1}{D(p)}\right\}$$

由于 $\frac{K_1}{D(\underline{p})} < 1$，$\frac{K_1}{D(\underline{p})} < \frac{K_1}{D(p)}$，故必有 $\frac{\partial \hat{\pi}_2(\underline{p})}{\partial \underline{p}} < 0$。

在上边的公式推导中作了简化，假定 $\underline{p}$ 提高后只在一个大于 $\underline{p}$ 的 p 上增加了微分级的概率。实际的情况更可能是，$\underline{p}$ 提高后在多个大于 $\underline{p}$ 的 p 上增加了微分级的概率。不过，将这样的实际情况形式化只是增加了论证的复杂程度，不会影响论证的基本特征和 $\frac{\partial \hat{\pi}_2(\underline{p})}{\partial \underline{p}} < 0$ 的最终结论。

由于 $\frac{\partial \hat{\pi}_2(\underline{p})}{\partial \underline{p}} < 0$ 和 $\frac{\partial \underline{\pi}_2(\underline{p})}{\partial \underline{p}} > 0$，必定会有 $\frac{\partial H(\underline{p})}{\partial \underline{p}} < 0$，提高 $\underline{p}$ 会降低 $\hat{\pi}_2(\underline{p})$ 大于 $\underline{\pi}_2(\underline{p})$ 的程度。

双头价格博弈的混合战略均衡下必定会有 $\hat{\pi}_2(\underline{p}) = \underline{\pi}_2(\underline{p})$，也即 $H(\underline{p}) = \hat{\pi}_2(\underline{p}) - \underline{\pi}_2(\underline{p}) = 0$。由于在小于 p^m 的 $\underline{p}$ 上一直都有 $\frac{\partial H(\underline{p})}{\partial \underline{p}} < 0$，因此在给定的产量对 (K_1, K_2) 下能够满足条件 $H(\underline{p}) = \hat{\pi}_2(\underline{p}) - \underline{\pi}_2(\underline{p}) = 0$ 的最多只能有一个 $\underline{p}$。如果有这个 $\underline{p}$，它也决定了给定的产量对 (K_1, K_2) 下唯一的一个混合战略均衡的 π_2。

由于 $\pi_2(\hat{p}_2) = p^m \cdot D(p^m) \cdot \int_{\underline{p}}^{pm} max\left\{0, 1 - \frac{K_1}{D(Z)}\right\} d\varphi_1(Z)$，而在区间 $[\underline{p}, p^m]$ 上所有的 p 都大于 $P(K_i + K_j)$，所以 π_2 必定会小于 $\pi_2(\hat{p}_2) = p^m \cdot D(p^m) \cdot \left[1 - \frac{K_1}{K_1 + K_2}\right]$。此外，前边也指出，价格博弈的混合战

略均衡下 $\underline{p}$ 必定大于 $P(K_i+K_j)$，所以 π_2 必定会大于 $K_2 \cdot P(K_i+K_j)$。

九、大厂商战略支撑集上界的断点问题

大厂商战略支撑集上界的断点，是指在 $K_1<K_2$ 的情况下，$\varphi_2(\hat{p}_1)<\varphi_1(\hat{p}_1)=1$，而 $\hat{p}_2$ 上有一个 $\varphi_2(p)$ 的断点，这一点上的概率分布值是一个非无穷小的正数。这意味着这种情况下概率分布函数 $\varphi_2(p)$ 在 $\hat{p}_2$ 这一点上不连续，$\lim\limits_{p\uparrow \hat{p}_2}\varphi_2(p)<1)$，而在 $\hat{p}_2$ 这一点上有概率值 $1-\varphi_2(p)$。通常 $\hat{p}_2$ 就等于 p^m。

可以证明，在 $K_1<K_2$ 的情况下，大厂商战略支撑集的上界上一般都会有断点。戴维逊和德奈克尔的文章也专门提到了 $K_1<K_2$ 时大厂商战略支撑集上界上有断点，对这个断点问题的讨论甚至占了文章后数学附录的一半[2]。但是戴维逊和德奈克尔文章对断点问题的讨论有严重问题，这就是：在某些情况下很明显地存在断点，但是他们的论文对这些情况却只字未提；这些情况包括 $\underline{p}\geq P(K_2)$ 且 $K_1<K_2$ 的情况，以及 $P(k_2)\geq p^m$ 从而必定有 $\underline{p}<P(K_2)$ 的情况。而他们文章中的论证，并不能证明在大厂商战略支撑集的上界会有断点。此外，他们的文章也没有严格地按上边所述的断点的数学式来讨论问题，以致给读者留下了一些不应有的混乱印象。

十、结束语

尽管存在上述种种错误和遗漏，戴维逊和德奈克尔的文章仍然有其不可磨灭的历史意义：它建立了一种与传统微观经济学的市场出清范式完全不同的分析模式。在这种模式中，价格不再像传统微观经济学说的那样总是会使需求等于供给，而是可能形成使产品的市场需求小于产品总供给的价格。我们完全可以进一步扩展戴维逊和德奈克尔的模型，将其作为解释供给过剩现象的基础。

戴维逊和德奈克尔的模型很好地解释了现实市场经济中的供给过剩和价格分散现象。在现实的市场经济中，正如戴维逊和德奈克尔的模型所指明的，同一个市场上的同种产品常常不是按同一个价格出售，产品的售价有时是分散的。在现实中不难观察到，同一个地区的不同商店，在同一时间可能会以不同价格出售同种商品。戴维逊和德奈克尔的模型也指明了，这种价格分散的现象通常与产品的供大于求联系在一起，在产品售价不同的企业中，售价最高的企业往往不能卖出其供给的全部产品。

参考文献

[1] 哈尔·范里安. 微观经济学现代观点［M］. 费方域，译. 上海：格致出版社，2015：352－363.

[2] Davidson，C.，Deneckere，R. Long－run Competition in Capacity，Short－run Competition in Price，and the Cournot Model［J］. The Rand Journal of Economics，1986（3）：404－415.

[3] Kreps，D. M.，Scheinkman，J. A. Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes［J］. The Bell Journal of Economics，1983（2）：326－337.

[4] 让·梯若尔. 产业组织理论［M］. 张维迎，译. 北京：中国人民大学出版社，2015：212－215.

责任编辑：景玉琴

Political Economics Analysis of Data Control and Monopoly in Platform Economy

Han Wenlong, Wang Kaijun

Abstract: The data control in platform economy displays both the general logic of Marx's Value Movement Theory and the temporal characteristics. With the normalizing logic of the platform, data control not only expands the time and space boundaries of value movement, promotes the platformization of value movement, but also makes the value appropriation happen on a larger scale and in a more secretive way, shaping a new form of alienation and posing a major challenge for the high quality development of platform economy. We check the platform economy itself by reflecting on data control, and find that there are some biases in the current discussions of platform economy, and we should treat the progressive aspect of platform monopoly and the necessity of breaking the monopoly from the perspective of dialectical development. Under the circumstance that data is the core asset of a platform, the platform economy issue concerns not only monopoly, but property right as well. Regarding data control, measures should be taken in three aspects: legalization of data rights, protection of laborers' interest and right and governance of platform monopoly, so as to promote the orderly expansion of capital, thus enabling the platform economy to really serve the people's growing expectation for a better life.

On Domestic Market Issue under the New Development Pattern

Zhang Junshan

Abstract: The proposal of the new development pattern with the domestic circulation as the mainstay and the domestic and international circulations reinforcing each other deepens the understanding of our national development path. The new development pattern aims to form a central state development mode featured by self accumulation and independent development, so that China can get rid of the influence of dependence on international monopoly capital. Under the new development pattern, the domestic market and the international market have their respective significance and play their special roles respectively. Domestic circulation aims to strengthen internal circulation and improve the quality of economy system, while international circulation takes "human community with a shared future" as its purpose, promoting domestic independent development during international economic exchange. The realization of new development pattern requires the institutional guarantee of socialism with Chinese characteristics. By following the people-centered philosophy and turning the people´s pursuit of a better-off life and the great dream of national rejuvenation into the domestic circulation structure of economy, we can open up the broad domestic market for production and solve the problem of insufficient domestic demand. To expand domestic market under the new development pattern, the Keynesian method to stimulate demand should not be adopted, while by way of rational use of surplus products we can promote the accumulation of production and the development of non production undertakings, so as to create demand for social products. With arrangement of reasonable consumption, people´s living level can be improved in the process of production accumulation and non-production development.

Research on Duopoly Non-cooperative Game Model under the Conditions of Supply Surplus

Zuo Dapei, Kang Ying, Chen Yuming

Abstract: The article concerning Duopoly Game published by Carl Davidson and Raymond Deneckere in 1986 provides a foundation for illustrating the supply surplus in product market of market economy with a mathematical model. But its quantitative inference itself has a few loop holes, even errors. In the article mentioned above, there is a fundamental negligence in the discussion of the breakpoint of the upper bound of the strategic support set for large manufacturers, and its mathematical derivation can not prove the existence of the breakpoint. The model is based on the "proportional rationing rule" that determines which buyers can obtain products when the products are underproductive. It is proved that, at the price of market clearing, if the price elasticity of demand is less than 1, the price game under the given product supply of each enterprise can only take mixed strategic equilibrium, and all possible product quotations by each enterprise will be higher than the product prices at market clearing. Davidson and Deneckere ´s articles have their own significance and contribute much, while their loopholes and mistakes need to be supplemented and corrected.

Research on the Perspective that Das Kapital is a Brilliant Political Economical Work

——Also a Reply to the Confusion out of On the Philosophical Foundation of Das Kapital by Xue Ting

Zhang Xu

Abstract: The essential judgment that Das Kapital is a brilliant political economical work maintains its objectivity against the change of the times or the progress of cognitive science. In response to "On the Philosophical Foundation of Das Kapital ", compared with " Das Kapital is a Brilliant Economical Work" and "Re-Study of the Philosophical Interpretation of Das Kapital ", this article adds a supplementary criticism towards the perspective that " Das Kapital is ontology" , with emphasis on the interpretation of the method of Das Kapital. The misunderstanding of the method of Das Kapital may be the origin of a series of controversial issues concerning Das Kapital.